EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - DR. E. W. BETH, AMERSFOORT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - DR. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
DR. J. HAANTJES, AMSTERDAM
DR. J. POPKEN, TER APEL - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSEN, HILVERSUM DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

20e JAARGANG 1943/44

Nr. 5, 6

Prijs per Jaargang f 6.30*.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,85* op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie van *f* 2,50 voor het verenigingsjaar van 1 September 1944 t/m 31 Augustus 1945 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

$$(py - a)\ (sy + t)^2 + (qy - b)\ (sy + t) + (ry - c) =$$
$$ps^2y^3 + (-as^2 + 2pst + qs)\ y^2 + (-2ast + pt^2 + qt - bs + r)y$$
$$+ (-at^2 - bt - c) = 0.$$

De vergelijking heeft één wortel oneindig groot, als $s = 0$ is, maar dan is tevens de coëfficient van y^2 gelijk nul, dus iedere lijn, waarvan de vergelijking $x = t$ is, snijdt de grafiek in drie punten, waarvan er twee in het oneindig verre punt van de y-as vallen, dat dus een dubbelpunt van de grafiek is.

Voor de waarde van t, waarvoor ook het derde snijpunt oneindig ver ligt, is de lijn, waarvan de vergelijking $y = t$ is, een raaklijn in het dubbelpunt. De voorwaarde is: $p^2 + qt + r = 0$ en $at^2 + bt + c \neq 0$, waaruit blijkt, dat de asymptoten van de grafiek, die de raaklijnen van de grafiek zijn in het oneindig ver gelegen dubbelpunt, achtereenvolgens de vergelijkingen $x - x_1 = 0$ en $x - x_2 = 0$ hebben, waarin x_1 en x_2 de wortels zijn van de vergelijking $px^2 + qx + r = 0$. Omdat deze asymptoten evenwijdig met de y-as zijn, worden zij de verticale asymptoten van de grafiek genoemd.

De eenvoudigste wijze, waarop de coördinaten van het punt S bepaald kunnen worden, is het bepalen van de snijpunten van de grafiek met de lijn, waarvan de vergelijking $y = \frac{a}{p}$ is; het bepalen van de vergelijkingen van de asymptoten kan op de eenvoudigste wijze geschieden, zoals dit in de leerboeken wordt aangegeven, dus door achtereenvolgens de voorwaarden te bepalen, opdat x en y oneindig groot zijn; hiervan zijn immers de resultaten in overeenstemming met die, welke in deze paragraaf werden verkregen.

§ 8. De voorbereiding, die in § 5 is gegeven, is eveneens voldoende voor de behandeling van de methode der centrale projectie, die wij gebruikten om het gedrag van de grafiek te leren kennen in de buurt van een oneindig ver gelegen punt en die, omtrent het bepalen van het aantal extremen van een gegeven functie. (Zie de paragrafen 2, 3 en 4.)

De behandeling van het bijzondere geval $p = 0$ kan, wat betreft het bepalen van de vergelijkingen van de asymptoten, geschieden op de wijze, waarop dit in de voorgaande paragraaf voor het algemene geval werd aangegeven en het bijzondere geval $a = p = 0$ levert ook geen enkele moeilijkheid op, zodat wij deze gedeelten van het onderwerp den lezer kunnen overlaten.

OFFICIEELE MEDEDEELINGEN VAN WIMECOS.

Kort verslag van de Algemeene Vergadering van Wimecos op 28 December 1943 te Amsterdam.

De Notulen van de vorige Algemeene Vergadering en het Jaarverslag werden onveranderd goedgekeurd. Aan het laatste zij ontleend, dat de Vereeniging op 31 Augustus 1943 251 leden telde; een toename van acht leden viel alzoo te constateeren. Vermelding verdient verder, dat het Bestuur op verzoek van het College van Inspecteurs advies heeft uitgebracht over het leerplan voor Mechanica in verband met de in te voeren drie uren voor dit vak en inzake de beperking van de eindexamens voor Wiskunde en Mechanica voor 1944. Dit verzoek was gedagteekend 16 Juli 1943. Op 18 Augustus d.a.v. is het advies uitgebracht, waarbij duidelijk naar voren gebracht is, dat een bevredigende regeling voor het vak Mechanica naar de meening van het Bestuur niet te bereiken is, daar een afgerond geheel niet tot stand is te brengen. Daar het Bestuur de overtuiging heeft, dat de noodtoestand van drie uur slechts tijdelijk is, heeft het in zijn schrijven wel aangegeven, hoe althans aan de bezwaren der door de tijdsomstandigheden opgedrongen regeling eenigszins kan worden tegemoet gekomen. Dit advies is in December 1943 geheel gevolgd. Het advies voor de eindexameneischen voor 1944 heeft het Bestuur gebaseerd op het feit, dat de eindexamens vermoedelijk iets vroeger dan anders plaats hebben.

Het Officieel Orgaan Euclides kon nog in een behoorlijk formaat verschijnen. De toekomst ziet er echter niet rooskleurig uit.

De Voorzitter Dr. J. Spijkerboer werd vervolgens bij acclamatie herkozen.

De Penningmeester werd, nadat zijn rekening door de H.H. Alders en Kiers was nagezien, gedechargeerd. De contributie voor het volgende vereenigingsjaar werd op *f* 2,50 vastgesteld. De keuze van de plaats voor de volgende Algemeene Vergadering is aan het Bestuur overgelaten, waarbij de Heer Snoep de toezegging kreeg, dat met zijn bezwaar, de datum niet te dicht na de Kerstdagen

vast te stellen in verband met de overvolle treinen, rekening zal worden gehouden.

Naar aanleiding van een opmerking van den Heer Kleefstra over een verslag van een vergadering van de Raad van Leeraren, waarin stond, dat „WiMeCos indertijd geen contact wenschte", is door den Voorzitter een brief voorgelezen, die door het Bestuur destijds aan de Raad werd gezonden, waarin staat, dat „het Bestuur gaarne de Raad van Leeraren bij voorkomende gelegenheden van advies wil dienen, maar voor ieder geval afzondelijk zijn houding wenscht vast te stellen; vooral in deze abnormale tijdsomstandigheden lijkt het ons Bestuur beter zich tot het bovenstaande te beperken; het is z.i. anders zeer wel mogelijk, dat er zich consequenties zullen voordoen, die noch door de Raad van Leeraren noch door het Bestuur van Wimecos bedoeld zijn en waarvan de draagwijdte van tevoren niet is te overzien." Na een debat, waaraan ook door den Heer Boks e.a. werd deelgenomen, werd besloten, dat het Bestuur zich over een en ander met de Raad in verbinding zou stellen. Op voorstel van Prof. Bottema is vervolgens de houding van het Bestuur in deze aangelegenheid goedgekeurd.

In de middagvergadering zijn de beide aangekondigde lezingen gehouden. De rondvraag leverde niets bijzonders op, waarna om kwart voor vijf de vergadering werd gesloten.

De Secretaris:
J. J. TEKELENBURG.

INNING CONTRIBUTIE.

De Penningmeester verzoekt aan de leden, die nog contributie schuldig zijn, deze ter voorkoming van inningskosten op de giro-rekening van de Vereeniging van Wiskundeleeraren, no. 143917, Amsterdam, te willen storten. De contributie bedraagt *f* 2,50. Zij, die Euclides langs andere weg ontvangen, betalen *f* 0,65.

De Penningmeester:
H. H. BUZEMAN.

DE ASTRONOMISCHE AFSTANDSBEPALING

DOOR

A. SMIT.

Voor hen, die zich willen bezighouden met de astronomische afstandsbepaling, en daarbij gevaar loopen in de war te geraken door de duizelingwekkende verten, zullen wij het probleem van de afstandsmeting eerst toelichten aan een bijzonder eenvoudig voorbeeld, waarbij de kenmerkende eigenaardigheden van de gebruikte methoden toch duidelijk te voorschijn treden.

Wij stellen ons voor, dat wij ons 's avonds aan het strand bevinden. In de verte zien wij het toplicht van een schip. Hoe ver is dit schip van ons verwijderd?

Om dit te weten te komen, gaan wij als volgt te werk: wij bakenen op het strand een *bekende* afstand AB (zie figuur 1) af en meten met behulp van het een of ander hoekmeetinstrument de hoeken ABS en BAS. Van driehoek ABS kennen wij dan één zijde en twee hoeken. Alles wat wij verder van die driehoek willen weten — bijv. de lengte van AS — kan met behulp van deze gegevens berekend worden. Ja, er is zelfs een manier, die ons de moeite van een *berekening* nog bespaart; wij nemen aan dat de afstand AB, de *basis*, bijv. 200 m is en dat de gemeten hoeken resp. 60 gr. en 70 gr. zijn. Wij teekenen nu een driehoek A'B'C' met een basis van 20 cm en waarvan de hoeken bij A' en B' gelijk moeten zijn aan de gegeven hoeken. In *gedaante* is deze nieuwe driehoek dan precies gelijk aan de werkelijke driehoek ABC, slechts in *grootte* verschillen ze: elke centimeter van de geteekende driehoek komt overeen met 10 meter in werkelijkheid. Na meting van A'S' met een centimetermaatje blijkt de lengte van S' tot A' 27,5 cm. De werkelijke afstand van het schip moet dus ongeveer 275 m geweest zijn.

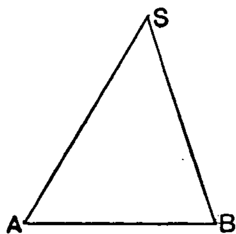


Fig. 1.

Deze uitkomst kan ook door wiskundige berekening gevonden worden, hetgeen een gelukkige omstandigheid is, want voor het geval, dat het schip wat ver weg is, zouden wij genoodzaakt zijn òf wel op onhandelbaar groote vellen papier te moeten werken, òf een bijzonder kleine schaal te kiezen. Met als gevolg: in beide gevallen onzuivere resultaten, terwijl de berekening betrouwbaar blijft. M.a.w. wanneer één zijde en twee hoeken van een driehoek gegeven zijn, dan is het mogelijk de overige lijnen met elke gewenschte graad van nauwkeurigheid te berekenen, onafhankelijk van de getalwaarde der gegevens, terwijl het zuiver teekenen van de driehoek steeds moeilijker wordt naarmate de gegeven zijde kleiner is t.o. van de beide andere zijden. Het is dan ook vanzelfsprekend, dat de astronomen, die altijd met driehoeken van de laatst bedoelde soort te maken hebben, steeds op de *berekening* aangewezen zijn. Laten wij ons bijv. het toplicht van het schip vervangen denken door de maan, terwijl voor de basis de middellijn van de aarde wordt gekozen. Teekenen wij nu de basis weer als een lijn van 20 cm, dan wordt de lijn AS ongeveer 6 meter. Desondanks staat de maan, astronomisch gesproken althans, vlak bij. De *berekening* van een driehoek met zijden van 20 cm en 6 m biedt daarentegen niet de minste bezwaren. Alvorens ons te verdiepen in de astronomische mogelijkheden van de aangeduide methode, komen wij eerst nog weer eens terug op ons voorbeeld van het schip en zullen de afstand daarvan op een andere manier bepalen. Hiertoe dienen wij te weten, welke sterkte het toplicht van het bedoelde schip heeft: laat ons aannemen 3000 kaars. Wij plaatsen nu ergens op het strand een 30-kaarslamp en verwijderen ons daar zoo ver vandaan, dat deze lamp ons even helder voorkomt als het toplicht. Stel dat deze afstand 50 m bedraagt. Wanneer het schip ook 50 meter van ons af lag, zou het toplicht ons blijkbaar 100 maal zoo helder lijken als de lamp. Dat dit niet zoo is, volgt uit het feit, dat het schip een grooter afstand dan 50 m heeft. Wanneer wij nu maar weten, welke samenhang er bestaat tusschen de afname in helderheid van een lichtbron en zijn afstand, dan kunnen wij de afstand van het schip uit onze gegevens opmaken. De gezochte betrekking nu is bekend: vergroot men de afstand tweemaal, dan wordt de helderheid viermaal zoo klein; vergroot men hem driemaal, dan wordt de helderheid 9 maal zoo klein, enz.

In het algemeen geldt deze regel: de helderheid neemt af met

het *kwadraat* van de afstand. Om 100 maal zwakker te worden, moet de lichtbron dus 10 maal verder verwijderd worden. Ons schip lag derhalve 10 × 50 = 500 m van ons af.

Vergelijken wij de beide methoden, dan valt ons op, dat zij op geheel verschillende beginselen berusten. Bij de tweede methode komt in het geheel geen hoekmeting te pas; daarentegen vereischt zij instrumenten om de lichtsterkte van twee lichtbronnen te vergelijken, zoogenaamde *fotometers*.

Ook mogen wij niet uit het oog verliezen, dat de methode alleen bruikbaar is, wanneer de sterkte van het toplicht te voren bekend is.

Wij zullen nu een beschrijving geven hoe de beide methoden toegepast worden om de afstanden der hemellichamen te bepalen en welke resultaten er mede verkregen zijn.

De eerste methode, die der hoekmeting, biedt zeer groote moeilijkheden voor de praktijk door de overweldigend groote afstanden der sterren, waartegen iedere afstand, die wij op aarde kunnen afzetten, in het niet verdwijnt. De astronomen kiezen dan ook een andere basis, nl. de afstand van de zon tot de aarde, welke van te voren afzonderlijk bepaald is en die rondweg 150 millioen kilometer bedraagt.

Het mag bekend verondersteld worden, dat de aarde een nagenoeg cirkelvormige baan om de zon beschrijft. Stellen wij ons deze baan in de ruimte voor, dan zien wij zonder veel moeite, dat er steeds één middellijn te vinden is, die een rechte hoek maakt met de verbindingslijn zon—ster, ZS. Van driehoek AZS (zie fig. 2) kennen wij dus AZ terwijl hoek Z = 90 gr. is. Wanneer wij nog hoek A meten, zijn wij weer in het bezit van de noodige gegevens om de afstand AS te kunnen berekenen. Daar de som van de drie hoeken van een driehoek 180 gr. bedraagt, is de hoek *p* bij S gelijk aan het verschil tusschen 90 gr. en hoek A. Deze hoek noemt men de *parallaxis* van de ster. Wanneer deze bekend is, kan blijkbaar A en vervolgens de afstand van de ster berekend worden en omgekeerd, daarom spreekt men vaak van parallaxismeting, als men afstandsmeting bedoelt en geeft in plaats van de afstand de parallaxis van de ster op. Hoe kleiner de parallaxis, hoe grooter de afstand.

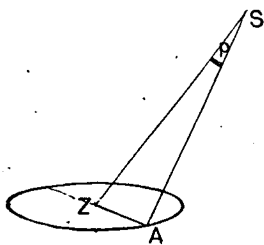


Fig. 2.

De meting van de parallaxis behoort tot de moeilijkste onderdeelen der praktische sterrenkunde. Dit komt vooral duidelijk uit, wanneer wij kennis nemen van de getalwaarden, die gevonden zijn. Om deze te kunnen beoordeelen, dienen wij nog een en ander vooraf te laten gaan over de nauwkeurigheid van onze hoekmetingen. Laten wij daartoe uitgaan van de hoek, die ons allen bekend is: de rechte hoek. Het 90ste deel van een rechte hoek noemen wij een graad. De graad wordt nog verder onderverdeeld in 60 hoekminuten en elk van deze nog weer in 60 hoekseconden. Een hoekje van één hoekseconde (1″) is dus het 324000ste deel van een rechte hoek.

Dat 1″ inderdaad al een zeer kleine, moeilijk te meten hoek is, kunnen wij bijv. op de volgende manier inzien. Als wij een latje van 15 cm zoo voor ons oog houden, dat de uiteinden eveneens 15 cm van ons oog verwijderd zijn, dan maken de lijnen, die wij uit het oog naar de uiteinden van het latje getrokken kunnen denken, een hoek van 60 gr. met elkaar. Wij zeggen, dat wij het latje zien onder een hoek van 60 gr. of ook, dat de *gezichtshoek* 60 gr. bedraagt. Verwijderen wij de lat van ons oog, dan neemt de gezichtshoek geleidelijk af. Als de afstand 860 cm is geworden, bedraagt hij nog maar 1 gr. Bij een afstand van ruim 500 m is de gezichtshoek afgenomen tot 1′ en pas als het latje zich op een afstand van ruim 30 km bevindt is de hoek 1″ geworden. Het latje zelf is dan natuurlijk al lang onzichtbaar geworden.

Welnu: met onze beste hoekmetingsinstrumenten kunnen wij nog honderdste deelen van seconden meten.

Natuurlijk is deze verfijnde meettechniek stap voor stap ontwikkeld. De pioniers der moderne sterrenkunde, *Copernicus, Tycho Brahé, Galilei* en *Kepler*, de eersten ook, die pogingen deden om de afstanden der sterren te meten, beschikten enkel over waarnemingen, die zonder kijkers, zonder microscopen e.d. hulpmiddelen verricht werden. De grens van hun nauwkeurigheid bedroeg hoogstens 3′ tot 5′. Pas langzamerhand steeg de nauwkeurigheid. Steeds bleven de pogingen om een parallaxis te meten ijdel, tot eindelijk de instrumenten een nauwkeurigheid van 0,″1 bereiken konden. Toen werden ook werkelijk eenige parallaxen gemeten, waaronder die van de ster α Centauri was, welke 0,″8 bedraagt en nog altijd op één na de grootste is, welke tot dusver gemeten zijn. Geen wonder dus, dat alle pogingen tusschen de jaren 1500 en 1839 tot mislukking gedoemd waren. Maar ook: wat een overweldigende

afstand heeft deze „nabij" gelegen ster. Oordeelt zelf: ons latje van 15 cm moest op ruim 30 km afstand gebracht worden om de gezichtshoek te verkleinen tot 1″, d.w.z. op ruim 200 000 keer de lengte van het latje. De afstand zon—aarde, die een billioen keer zoo groot is, wordt van α *Centauri* uit, onder een hoekje van 0,″8 gezien; de afstand van deze ster moet dus meer dan 250 000 maal de afstand zon—aarde, zegge 40 billioen kilometers zijn. De parallaxis der meeste sterren is veel kleiner. Dat beteekent, dat de meeste sterren zich niet leenen voor de parallaxis-meting op de hier aangegeven manier, omdat zelfs 150 millioen kilometer een te kleine basis vormt.

Gelukkig is er nog een andere manier, waardoor wij over grooter basislengte kunnen beschikken. Het is nl. gebleken, dat de zon zich met het geheele planetenstelsel door de ruimte beweegt met een snelheid van ongeveer 20 km/sec. In één jaar legt zij dus ruim 600 millioen kilometer of ongeveer vier maal de afstand zon—aarde af. Voor zoover wij tot dusver weten, volgt deze beweging een rechte lijn. Door bijv. 10 jaar te wachten tusschen twee bepalingen van de richting, waarin wij een ster zien, kunnen wij dus beschikken over een 40 maal grooter basislengte dan de aardbeweging ons verschaffen kan en daardoor de afstanden van sterren meten, die nog 40 maal zoover van ons afstaan als de verste afstanden, waarvoor de eerst beschreven methode bruikbaar is.

Het mag niet verzwegen worden, dat de aldus gemeten afstanden wel iets minder nauwkeurig zijn dan die, welke op de aardbeweging berusten, omdat er onzekerheden bestaan zoowel betreffende de richting van de zonsbeweging als betreffende het juiste bedrag van de snelheid. Een groot voordeel is echter hierin gelegen, dat de basis in verloop van tijd steeds grooter wordt, zoodat over eenige honderden jaren de kennis van de afstanden der sterren belangrijk verder gekomen zal zijn.

Op het oogenblik zijn wij nog niet zoo ver en mogen wij blij zijn, dat wij de naaste omgeving van de zon, tot op een afstand van enkele duizenden lichtjaren niet al te onvolledig kennen.

Wij keeren thans terug tot de tweede manier van afstandsbepaling. Hiertoe moeten wij kennis nemen van het zeer belangrijke sterrenkundige begrip: *grootte-klasse* of kortweg de *grootte* of de *magnitudo* van een ster.

In z'n algemeene beteekenis is het woord „grootte-klasse" wel

bekend. Wij onderscheiden sterren van de 1ste, 2de, 3de, enz. grootte. De sterren, die zoo zwak zijn, dat zij nog maar amper met ongewapend oog kunnen worden waargenomen, vormen de klasse der sterren van de 6de grootte. De helderste sterren vormen de klasse van de 1ste grootte.

Deze omschrijving is echter te algemeen. De juiste beteekenis van het begrip „grootte-klasse" krijgen wij op de volgende wijze: wanneer van twee sterren de eene 2½ maal zoo helder is als de andere, dan zeggen wij, dat zij één grootte-klasse in helderheid verschillen.

Bij definitie wordt verder een bepaalde ster — de Poolster — tot ster van de tweede grootte (2^m) gepromoveerd. Dan kan de grootte-klasse van elke andere ster opgegeven worden, als wij eerst, met behulp van een fotometer bepaald hebben, hoeveel maal helder- der of zwakker zij is dan de Poolster.

Wij weten tegenwoordig, dat niet alle sterren onderling gelijk zijn. Er bestaan naast zeer heldere ook zwakkere sterren. Maar de groote verschillen, die wij waarnemen, berusten toch voornamelijk op *afstandsverschillen*. Twee sterren met een helderheidsverschil van 10 grootte-klassen zouden, wanneer zij op gelijke afstand ge- plaatst konden worden, misschien even helder kunnen lijken, of mogelijk zou de ster, die ons nu het zwakst lijkt, inderdaad de meest lichtgevende van de twee kunnen zijn. Daarom noemen wij de grootte der sterren, zooals wij die waarnemen, de *schijnbare grootte*.

Is de afstand van een ster bekend, dan kunnen wij zonder veel moeite berekenen, hoe helder deze ster ons zou voorkomen, wan- neer zij op een andere afstand geplaatst was. Er is nu overeen- gekomen om de grootte, die een ster zou hebben, wanneer zij met behoud van haar helderheid verplaatst werd tot op een afstand van ongeveer 32,5 lichtjaren (juister: tot op zoodanige afstand, dat haar parallaxis 0,"1 zou bedragen), haar *absolute grootte* te noemen.

Kent men de schijnbare en de absolute grootte dan is het niet moeilijk de afstand van de ster te berekenen.

Het meten van de schijnbare grootte kan fotografisch of met behulp van een of andere fotometer tegenwoordig zeer nauwkeurig geschieden. Hoe vinden wij echter de absolute grootte, als de afstand onbekend is?

In het algemeen is dat niet goed mogelijk, er bestaat echter een soort sterren, waarvoor deze puzzle toch opgelost kon worden: die der *Cepheïden.*

De ster α *Cephei* is een *veranderlijke ster,* d.w.z. wanneer wij op achtereenvolgende tijdstippen haar schijnbare grootte bepalen, blijkt deze op regelmatige wijze te veranderen. Kenmerkend daarbij is de regelmaat, waarmede de veranderingen terugkeeren. De duur van de lichtwisseling is praktisch gesproken constant, in de laatste honderd jaar is zij nl. slechts 8 sec. korter geworden.

Er zijn tal van sterren bekend, die dezelfde soort van lichtwisselingen vertoonen, waarbij alleen de duur van de periode en de grootte van de lichtwisseling met die van α *Cephei* verschilt. Wij noemen deze sterren *Cepheïden.* Een groot aantal komt o.a. voor in de Groote Wolk van Magellaan, die op het zuidelijk halfrond zichtbaar is. Bij een onderzoek van deze sterren viel het *Miss Leavitt* op, dat er een duidelijk verband bestaat tusschen de periode en de schijnbare helderheid van de sterren in de Wolk. Nu staan de sterren van de Wolk nagenoeg op gelijke afstanden van de zon. Het verband tusschen periode en schijnbare grootte is dus ook een verband tusschen periode en absolute grootte. Wanneer nu de schijnbare grootte nog gemeten wordt, zijn wij in het bezit der twee gegevens, die noodig zijn om de afstand van de betreffende ster te bepalen op de manier, die wij hierboven aangaven.

Een gunstige bijzonderheid is nog, dat de Cepheïden zonder uitzondering tot de zeer lichtsterke sterren behooren, zoodat zij ook op buitengewoon groote afstanden nog helder genoeg blijven om waargenomen te worden.

Het geheel der afstandsmetingen, gecombineerd met nog andere beschouwingen, waarop wij niet kunnen ingaan, heeft in de laatste jaren geleid tot een tamelijk scherp geteekend beeld van de ons omringende wereld der vaste sterren. Wij moeten ons voorstellen, dat zij een reusachtig uitgebreid stelsel, het *Melkwegstelsel,* vormen. Dit heeft min of meer de gedaante van een platte schijf, waarvan de doorsnede wordt geschat op 30.000 tot 200.000 lichtjaren. Naast sterren bevat het ook uitgebreide nevelmassa's. Het wordt omgeven door een aantal bolvormige sterrenhoopen. Het geheele stelsel bevat tusschen de honderd en tweehonderd duizend millioen sterren. De zon met haar naaste omgeving — o.a. de meeste sterren, die wij met ongewapend oog kunnen waarnemen — vormen

te zamen het zoogenaamde *stelsel van Kapteyn.* Dit ligt op ongeveer 30.000 lichtjaren van het middelpunt van het geheele Melkwegstelsel.

Laten wij ons in gedachten verplaatsen tot op een afstand van één millioen lichtjaren van het Melkwegstelsel. Rondom ons is het heelal ledig geworden. Geen ster bevindt zich binnen afstanden van 6 à 800.000 lichtjaren van ons af. Terugziende blijkt het Melkwegstelsel ineengeschrompeld te zijn tot een nevelachtige vlek. Rondom ons ontwaren wij meerdere van zulke vlekken. Door een sterke kijker bezien, vertoonen deze ons een dergelijk beeld — zij het misschien op iets kleiner schaal — als ons Melkwegsysteem. Vooral treft ons daarbij de spiraalachtige gedaante dezer objecten: wij nemen de wereld der *spiraalvormige nevelvlekken* waar.

Wij kunnen hier niet de saamgestelde bouw der spiraalnevels beschrijven, maar beperken ons tot enkele typische eigenschappen. Bijna steeds gaan van het centrum twee tegenover elkaar gelegen armen, windingen uit. In het algemeen bezitten ze meer of minder groote kernen, verdichtingen, die aanzienlijk helderder zijn dan de armen. In deze laatste vindt men veelal condensaties, die ons aan sterren doen denken. Een eigenaardigheid van talrijke spiraalnevels, waarvan het vlak een kleine hoek maakt met de gezichtslijn, is verder een donkere band in de groote as der ellips- of spoelvormige figuur. Om een denkbeeld van de verdeeling der spiraalnevels in de ruimte te krijgen, is de kennis van hun afstand de eerste vereischte. Waar Cepheïden ontbreken, zijn wij op andere manieren aangewezen. Eén hiervan berust erop, dat de afmetingen der nevels, wier afstanden bekend zijn, nagenoeg alle van dezelfde grootte bleken te zijn. Wanneer wij nu mogen aannemen, dat dit zelfde ook waar is voor de overige nevels, hebben wij in de schijnbare middellijn d.i. de hoek, waaronder wij de nevel zien een maat voor hun afstand. Is de schijnbare middellijn bijv. 10 keer zoo klein als die van een nevel met bekende afstand, dan is deze nevel ook 10 maal zoo ver van ons verwijderd.

Wanneer dit de eenige manier was, zouden de aldus gemeten afstanden niet al te veel vertrouwen verdienen, maar gelukkig stemmen zij behoorlijk overeen met bepalingen, die op nog andere overwegingen berusten. Wij zullen hier niet verder bij stilstaan en enkel vermelden, dat wij met een tamelijke zekerheid de afstanden van een honderdtal spiraalnevels kennen.

UIT HET VERSLAG VAN DE STAATSCOMMISSIE 1943

De gemiddelde cijfers voor de *wiskunde* bedroegen in de jaren 1941, 1942 en 1943: voor de stelkunde van de A-candidaten onderscheidenlijk 5,77; 5,50; 5,40; voor de meetkunde van de A-candidaten 5,55; 5,33; 5,50. Een lager cijfer dan 4 moest in genoemde jaren worden toegekend voor de stelkunde aan 22 van de 198; 34 van de 254; 34 van de 259; voor de meetkunde aan 25 van de 199; 40 van de 252; 37 van de 253 geëxamineerde A-candidaten.

De subsommissie meent er goed aan te doen, den candidaten nogmaals aan te raden vorige verslagen eens terdege te bestudeeren. Ook dit jaar waren verscheiden examinandi niet in staat aan te toonen, dat de functie $x^2 + 2x + 2$ een minimum bereikt. De subcommissie is niet genegen genoegen te nemen met het antwoord „de uiterste waarde bedraagt $\frac{-D}{4a}$ voor $x = \frac{b}{2a}$". Nog slechter verging het de vraag, aan te toonen, dat de genoemde functie geen maximum bezit. In het algemeen trouwens moest bij menig examen worden vastgesteld, dat de candidaat te veel had gememoriseerd met voorbijgaan van eenige poging tot inzicht. Op de vraag „toon aan, dat $x^2 + 2x + > 0$ voor alle reëele waarden van x", acht de subcommissie het antwoord „aangezien de factor van x^2 positief en de discriminant negatief is, zal deze functie hetzelfde teeken bezitten als x^2", zoowel bij het schriftelijk werk als bij het mondeling examen niet bevredigend. De discriminant moet slechts een criterium blijven voor den aard van de wortels eener vierkantsvergelijking of den aard van de nulpunten van een kwadratische functie. Grafieken konden soms wel gemaakt worden, maar grafieken lezen was voor vele candidaten een ware beproeving, zoodat zij niet in staat waren de grafieken te gebruiken ter illustratie van het vraagstuk, dat werd voorgelegd.

Dat $\sqrt{(x-2)^2}$ niet zeker gelijk is aan $x-2$, dat $\sqrt{x} \times \sqrt{(x-1)}$ niet zeker gelijk is aan $\sqrt{x(x-1)}$, was velen een openbaring. En dit is dan ook geen wonder, omdat bij nader onderzoek blijkt, dat men niet op de hoogte is van de definitie van $\sqrt{A}$ en van de voorwaarden, waaronder de eigenschappen van de wortels bewezen zijn. Van de candidaten wordt ook geëischt, dat zij bekend zijn met de techniek der worteltrekking.

Dat men in de stelkunde gewoon is een nog onbekende grootehd voor te stellen door een letter, is velen candidaten blijkbaar ontgaan. Zou men de oefenstof, die men vindt in de „ingekleede vergelijkingen” misschien te veel als een op zich zelf staand hoofdstuk opvatten?

Ook wat de meetkunde betreft, blijven vele opmerkingen uit de vorige verslagen nog actueel. In het bijzonder bleek, dat heel wat candidaten slecht op de hoogte waren van vraagstukken, waarin sprake is van om- en ingeschreven bollen en kegels. Zij waren, ook met hulp van den examinator, niet in staat om de bijzonderheden vast te stellen, die in bepaalde gevallen uit dergelijke gegevens kunnen worden afgeleid. In dit opzicht vertoonden ook verscheidene B-candidaten geen beter inzicht.

Bij het beantwoorden van meer elementaire vragen in de stereometrie wordt aan toekomstige examinandi aangeraden zich goed te realiseeren van welke hoofdstellingen men telkens gebruik maakt bij het trekken van een conclusie.

Aangezien sommige candidaten mededeelden van hun opleiders te hebben vernomen, dat zij niet zouden geëxamineerd worden in de vlakke meetkunde, acht de subcommissie het gewenscht op de onjuistheid van deze meening nadrukkelijk te wijzen. [1])

Dat B-candidaten, ook al in verband met de goniometrie, behoorlijk dienen te kunnen werken met radialen, behoeft geen betoog. Toch valt ook hier te constateren, dat dit onderdeel van de meetkunde veelal zeer slecht werd begrepen.

Vele candidaten waren onbekend met het begrip dimensie. Van een kubus met ribbe a werden voor de diagonaal ka^3 en voor den inhoud ka^2 soms zonder bezwaar aanvaard.

Voor de B-candidaten waren de gemiddelde cijfers in de jaren 1941, 1942 en 1943 voor de stelkunde onderscheidenlijk 5,65; 5,85; 5,23; voor de meetkunde 4,77; 4,56; 5,51; voor de trigonometrie en analytische meetkunde 5,23; 5,27; 5,82. Minder dan het cijfer 4 behaalden in genoemde jaren voor de stelkunde: 6 van de 34; 8 van de 55; 3 van de 51; voor de meetkunde: 7 van de 19; 13 van de 40; 2 van de 34; voor de trigonometrie en analytische meetkunde 8 van de 34; 14 van de 55; 8 van de 51 geëxamineerde B-candidaten.

Wat de stelkunde aangaat, viel het de subcommissie op, hoe slecht ook B-candidaten in staat waren om reeds geteekende grafieken te gebruiken bij het beantwoorden van gestelde vragen. Dat

---

1) Zie Dr Schamhardt: Mondelinge Staatsexamens A. *Red.*

dalende meetkundige reeksen geen convergente reeksen behoeven te zijn, wekte wel eens verbazing. Zeer gebrekkig was soms het rekenen met behulp van een logarithmentafel, laat staan het bepalen van de nauwkeurigheid van de uitkomst. Velen waren zelfs nog niet doorgedrongen tot de definitie van $\log a$.

Wat de gonio- en trigonometrie betreft, hier dient men het aantal formules tot het uiterste te beperken. Men moet er dan evenwel zorg voor dragen, dat men die formules door en door kent; anders is het onmogelijk bij goniometrische herleidingen een weg te vinden, die tot vereenvoudigingen en tot conclusies voert.

De ongelijkheden $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ en de limiet van $\frac{x}{\sin x}$ als x tot nul nadert, met de voorwaarden, waaronder ze gelden, acht de subcommissie belangrijk genoeg om er nog eens de aandacht op te vestigen.

Hoe vreemd kijken sommige candidaten op, als men vraagt het percentage van de fout te bepalen, die men maakt, als men $\sin x$ verandert in x (of $\operatorname{tg} x$), als $x = 15°$ is.

Op de vraag „schets eens ruw het beloop van de grafiek van $y = \sin x$ en $y = \cos x$" kreeg de subcommissie soms geen, soms een fantastische schets. Geen wonder, dat men dan niet in staat is om een grafiek te schetsen van $y = \log \sin x$.

In de analytische meetkunde waren de meeste candidaten behoorlijk in staat om de meetkundige plaats te bepalen van een veranderlijk punt, maar meer elementaire kwesties werden soms onbevredigend gekend. Dat de richtingscoëfficient van een rechte door de punten $(x_1 y_1)$ en $(x_2 y_2)$ gelijk is aan $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, dat men den afstand van een punt tot een rechte bepaalt met behulp van een normaalvergelijking van Hesse, dat het linkerlid van de vergelijking $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ het kwadraat van een afstand voorstelt, als men x en y alsook a en b fixeert, zijn dingen, die men paraat moet hebben. Het getuigt toch van weinig inzicht, als men zegt: „$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ stelt de vergelijking voor van een cirkel; want als men de haakjes uitwerkt, krijgt men een vergelijking zonder term xy, waarin x^2 en y^2 denzelfden coëfficient hebben."

Men dient te begrijpen, dat de kromme met de vergelijking $bx^2 + 3y^2 + 2x - 3 = 0$ de x-as wel en de y-as niet tot symmetrie-as heeft.

Bij een gegeven kegelsnede kon men „de raakkoorde" (zijn de namen poollijn en pool niet beter?) van een punt wel bepalen, maar het omgekeerde vraagstuk leverde meestal te groote moeilijkheid op.

Ook vraagstukken over cirkels, die een anderen cirkel middendoor deelen of loodrecht snijden, waren voor vele candidaten te lastig.

De subcommissie voor de *natuurkunde* kan slechts weinig ingenomen zijn met de door de candidaten bereikte resultaten. Telkens weer moest zij ernstige tekortkomingen in inzicht èn kennis opmerken. De leer van het licht was door verschillende candidaten geheel weggelaten (de leeraar had gezegd: „dat hoefde niet"). Ook onder hen, die niet met dit excuus voor den dag kwamen, waren er niet bij machte de wet van Snellius naar behooren te formuleeren: het spreken over optisch dichter en ijler media heeft eerst zin, als men de verklaring van deze wet volgens Huygens helder voor den geest heeft. Vragen over het voortbrengen van lijnen-, bandenen continue spectra, waarbij de commissie prijs stelt op eenige toelichting, bleven dikwijls onbeantwoord, zelfs al werd de aandacht gevestigd op Geisslersche buizen. Met de kennis der straling van een zwart lichaam als functie van de temperatuur èn de golflengte was het in het algemeen droevig gesteld, vooral wanneer verzocht werd een en ander door een grafiek toe te lichten. Het kostte moeite te vernemen, hoe men kan vaststellen dat bijv. het blauwe licht van den hemel gedeeltelijk gepolariseerd is. De subcommissie waardeerde het zeer, als de candidaten behoorlijk op de hoogte waren van een tralie en van een nicol, een verklaring wisten te geven van het optreden van kleuren in dunne vliezen, termen als relatief dispergeerend vermogen bleken te verstaan, aannemelijk konden maken, waarom de lichtvoortplanting een transversaal karakter bezit, enz.

Wat de electriciteitsleer betreft, zou de subcommissie misschien kunnen volstaan met naar verslagen van haar voorgangsters te verwijzen. Zij zal zich beperken tot het doen van enkele grepen. Het verloop van electrostatische krachtlijnen werd vaak op zeer fantastische wijze aangegeven, het verband tusschen potentiaal en veldsterkte slecht gekend, evenals de energie van een geladen condensator; dikwijls werd zelfs niet ingezien, hoe men ook langs niet-electrostatischen weg een condensator een lading kan geven; ook van de toepassing er van waren verschillende examinandi niet op de hoogte.

Voor het gebruik van den term electromotorische kracht legden verscheidene candidaten een zekere vrees aan den dag; de grootte aan te geven van het stroomeffect van een gesloten keten kostte veelal ontzaglijk veel moeite. De veldsterkte, voortgebracht door den stroom in een rechten stroomdraad, liet men bijna algemeen afnemen evenredig met het kwadraat van den afstand tot den

stroomdraad. Wel werd vrij algemeen geweten, waartoe een transformator dient, maar de verklaring van den bouw liet soms alles te wenschen over, doordat tot verbazing van de subcommissie het verloop van de magnetische krachtlijnen zoo werd aangegeven, dat er van een opgewekte E.M.K. van inductie geen sprake kon zijn. De beteekenis van de gloeidraadkathode was velen candidaten ten eenenmale onbekend, wat men tegenwoordig toch wel zeer vreemd mag vinden. De toelichting der werking van een Ruhmkorff door middel van een grafiek, die het verloop van den stroom in de primaire wikkeling en dat van de E.M.K. in de secundaire dient aan te geven, bleek in vele gevallen een te zware opgave. De schakeling van een voltmeter werd herhaaldelijk verkeerd aangegeven, doordat het beginsel, waarop dit instrument berust, niet voldoende werd begrepen.

Ook de warmteleer hadden verschillende candidaten zeer oppervlakkig bestudeerd. Ook bij dit hoofdstuk der natuurkunde werden grafieken dikwijls moeizaam verkregen en vervolgens slecht geïnterpreteerd. Groote voorzichtigheid werd meestal aan den dag gelegd, als de examinator vroeg naar het verloop van de spanning van verzadigden waterdamp als functie van de temperatuur; de technische beteekenis hiervan werd vaak niet doorzien. De wijze, waarop Mayer het mechanische warmte-aequivalent heeft kunnen bepalen, leverde in het algemeen geen moeilijkheden op. Ook wanneer men met het begrip kritische temperatuur vertrouwd bleek te zijn, kostte het soms moeite het gebruik van ammoniak of zwaveldioxyde bij koelmachines behoorlijk te motiveeren.

Sommige candidaten werden in groote verlegenheid gebracht door vragen als de volgende: Hoe wordt vloeibare lucht vervoerd en in welken toestand bevindt zij zich dan? Na omkeering van een koolzuurcylinder krijgt men daaruit vast koolzuur; welke temperatuur heeft deze stof? U hebt daar in het P-T-diagram, uitgaande van het tripelpunt, ook de lijn vastvloeistof geteekend, vooroverhellend; is dat ook bij H_2O het geval? Zoo niet, hoe kunt U zulks duidelijk maken? enz. enz.

De resultaten van het examen in de *scheikunde* steken bij die van de natuurkunde zeer gunstig af, hetgeen ook duidelijk in het overzicht der behaalde cijfers voor den dag komt. Men had meer contact met elkaar en de subcommissie kreeg herhaaldelijk den indruk, dat de wenken, door haar voorgangsters gegeven, door vele candidaten ter harte waren genomen.

Ondanks deze verbeteringen vielen toch nog bij verschillende

examinandi leemten in kennis en gebrek aan inzicht vast te stellen. Dat de electrolyten opgebouwd zijn uit positieve en negatieve ionen, waarin hun waterige oplossingen dissocieeren, zoodat dus aan reacties tusschen die oplossingen vrijwel uitsluitend door de ionen wordt deelgenomen, hadden verschillende candidaten zich niet voldoende eigen gemaakt: dat de ionen door zuiver electrostatische krachten bij elkaar worden gehouden, stond hun niet steeds helder voor den geest. Dat bij KCN in tegenstelling tot RCN moeilijk van isomerie sprake kan zijn, het typische verschil tusschen zouten en esters, de structuur van stoffen als NH_4Cl, H_2SO_4, $K_4Fe(CN)_6$ kon niet altijd even vlot worden aangegeven en toegelicht. Enkele candidaten hadden nooit gehoord van valentie-electronen en wisten in dit verband geen raad met verbindingen als Ca_3P_2 en P_2O_5. Doordat sommigen met de geringe beweeglijkheid van het chlooratoom in benzeenchloride niet bekend waren, zagen zij het belang van het sulfoneeren en nitreeren niet voldoende in. De beteekenis van het woord reageeren werd niet altijd doorgrond: wordt gevraagd: „hoe reageert men op aldehyden?" dan verwacht men niet als antwoord: „met de cyaanhydrinesynthese". Het opschrijven van de isomeren vervat bijv. in $C_4H_8O_2$; het verschil aan te geven tusschen zuuramiden en aminozuren; duidelijk te zeggen, wat onder stereoïsomerie wordt verstaan, hoe racemische mengsels in hun componenten kunnen worden gesplitst, hoe bijv. aldehyden kunnen polymeriseeren; het doorzien van verschillende *niet* „geleerde" verbindingen, enz. enz. Niet elken candidaat ging dit alles natuurlijk even gemakkelijk van de hand. De wet van Gay-Lussac, die als het ware de wet van de verbindingsgewichten van Berzelius aanvult, kenden verschillende candidaten niet voldoende, hoewel eenvoudige stoichiometrische kwesties hun geen moeilijkheden opleverden.

Het bevreemdde de subcommissie bij enkele candidaten te moeten vaststellen, dat zij van de eigenschappen van zwavelzuur, salpeterzuur en ammoniak niet voldoende op de hoogte waren. Vragen, gedaan in verband met het chemisch evenwicht, inzonderheid met het waterevenwicht, geven geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen, evenmin als steekproeven, genomen op het gebied van de maatanalyse, dus vooral op dat der jodo- en oxydimetrie.

Om zich eenigszins met den aard van dit examen vertrouwd te maken, blijft voor toekomstige examinandi ook voor dit onderdeel kennisneming van vroegere verslagen aanbevelenswaardig.

KORRELS.

LXI.

Dr. E. M. Bruins heeft, volgens Euclides No. 1, 2 20e jaargang 1943/44, bij de aanvaarding van het lectoraat in de Analyse aan de Gemeente-universiteit van Amsterdam, in zijn rede „Mathematici en Physici", gezegd (Bladz. 12):

> „. . . Wanneer de philosoof, die thans de Pensées bewerkt, bij voorbeeld in de eerste klasse van het Gymnasium er niet in was geslaagd zich de techniek der negatieve getallen volkomen eigen te maken, zou men hem ongetwijfeld naar de H.B.S. hebben gestuurd, omdat het onbegonnen werk zou zijn geweest hem iets van wiskunde te doen begrijpen".

Is deze slecht gestelde tirade een bewijs van zelfvoldane onwetendheid of een tegen beter weten in uitgesproken sneer aan het adres der H.B.S.? Of was het alleen de bedoeling om een voorbeeld te geven van wat „niet-brillante nonsens" is in tegenstelling met de „brillante nonsens" van Dirac, waarover op Bladz. 10 van Euclides gesproken wordt? W. J. VOLLEWENS.

Het antwoord op de tweede vraag luidt: neen!

Het antwoord op de eerste vraag eerste deel moet van anderen worden verkregen; dat op het tweede deel luidt: neen!

Ter toelichting moge nog naar voren worden gebracht, dat met zorg en voordacht het woord „begrijpen" werd gekozen in tegenstelling tot „leeren". Een blindgeborene kan leeren, dat de „Nachtwacht" een der mooiste schilderijen is. Hem dit doen begrijpen, beleven, kan men niet. Mutatis mutandis: Iemand, die met vrucht een klassieke opleiding genoten heeft, behoeft men de juistheid niet nader te motiveeren; iemand, die deze niet genoten heeft *kan* men de juistheid niet duidelijk maken. Compenseert deze laatste het „verschil" dan behoeft ook hij geen nadere verklaring.

In elk geval was er geen sprake van „tegen beter weten in", want sterker: Tenslotte ben ik van meening, dat de „wet Limburg" moet worden ingetrokken! E. M. BRUINS.

LXII.

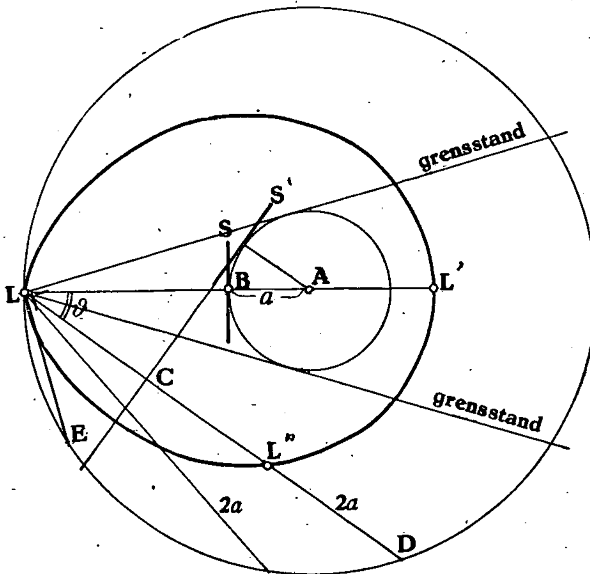
Een ongezochte gelegenheid de leerlingen kennis te doen maken

met een der — hun meestal zeer welkome — „hogere" krommen biedt de beantwoording van de volgende vraag.

„Welke kromme doorloopt het virtuele beeldpunt van een lichtpunt L bij een draaiende spiegel?"

Zij S de spiegel. Deze is draaibaar om een as door A loodrecht op het vlak van tekening. L is het lichtende punt.

Als S de stand S′ heeft bereikt is L″ het beeld van L (LC = CL″). Noem LA m en AB a dan is, als $\angle$ BLC $= \theta$ is, LC $= m \cos\theta - a$, dus LL″ $= 2m \cos\ \theta - 2a$.



Derhalve is de meetkundige plaats van het bedoelde beeldpunt de kromme die bekend is als de *limaçon* of *slaklijn van Pascal.*

Immers om L″ te vinden kan men het tweede snijpunt D van LC bepalen met de cirkel met A tot middelpunt en AL ($= m$) als straal en op DL het lijnstuk DL″ ($= 2a$) afzetten. Insgelijks voor alle in aanmerking komende rechten door L (zie figuur).

Het belangwekkende van deze toepassing is, dat de leerling hier *zelf* aan 't werk kan gaan. Hij kan verschillende punten construeren en komt zo tot de „grensstanden" [1]) van de spiegel en vindt

[1]) Hiermee (zie figuur) correspondeert L. Trekt men LE loodrecht op een der grensstanden, dan leert een eenvoudige beschouwing, dat LE $= 2a$ is. Hierbij behoort inderdaad het punt L van de meetkundige plaats, zoals physisch direct te begrijpen is.

aldus het gedeelte van de limaçon, dat hier voldoet. De docent kan de opgave uitbreiden: „Indien de achterkant van de spiegel ook eens spiegelend was, voldoen dan meer punten van de limaçon?"

Ongezocht kan de docent, de zaak meer wiskundig opvattende, nadat het bovenstaande behandeld is, den leerling de gevallen $b = m$ en $b > m$ laten tekenen. Het geval $a = 0$, waarbij dus de spiegel wentelt om een rechte in zijn vlak gelegen, volgt onmiddellijk uit het bovenstaande. Men doet echter beter het daaraan te doen voorafgaan, te meer daar meetkundig direct is in te zien, dat hier een deel van een cirkel optreedt.

Wellicht dat dit alles, door het af te leiden uit de eenvoudige natuurkundige beschouwing aan 't begin genoemd, de belangstelling van den leerling vasthoudt en hem het probleem zelfstandig doet aanpakken. Hij maakt dan kennis met een conchoïdale transformatie van een cirkel op een wijze die geen napraterij is, maar tevens zijn daarvoor in aanmerking komende geestelijke functies oefening biedt.

(Naar men ziet voldoet slechts de „kleine lus" van de limaçon; zie b.v. Rutgers: Inleiding tot de analytische meetkunde, eerste deel Fig. 33a. Althans, wanneer S slechts aan één zijde spiegelt).

Dr. J. F. DE VRIES.

LXIII.

NORMAALVERGELIJKING VAN EEN LIJN EN AFSTAND PUNT TOT LIJN.

Gegeven een rechthoekig assenstelsel en $x \cos \nu + y \sin \nu = n$, de vergelijking van een lijn op dit stelsel; n is steeds positief en de hoek ν kan variëren van 0 tot 360 graden.

Gevraagd wordt, de afstand van een punt x_1, y_1 tot deze lijn te berekenen.

Oplossing: Verschuif, zonder rotatie, het assenstelsel, tot x_1, y_1 de oorsprong van een nieuw assenstelsel is. De vergelijking van de lijn op dit nieuwe stelsel is $(x + x_1) \cos \nu + (y + y_1) \sin \nu = n$.

De normaalvergelijking van deze lijn op het nieuwe stelsel is dan een van de beide vergelijkingen $x \cos \nu + y \sin \nu = \pm (x_1 \cos \nu + y_1 \sin \nu - n)$.

De gevraagde afstand $d = | x_1 \cos \nu + y_1 \sin \nu - n |$.

Bisectrices.

Zij $f(x, y) = 0$ de normaalvergelijking van een lijn. De afstand

van een punt x_1, y_1 tot deze lijn is dan $| f(x_1, y_1) |$. In 't volgende nemen we voor de afstand $f(x_1, y_1)$. Al naarmate deze waarde positief of negatief is, zeggen we dat het gekozen punt in het positieve of negatieve gebied van de lijn ligt. De oorsprong ligt steeds in het negatieve gebied, daar $f(0,0) = -n$ is en dus negatief is.

Neem twee lijnen, die elkaar snijden en waarvan de vergelijkingen in normaalvorm zijn $f(x, y) = 0$ en $\varphi(x, y) = 0$. Deze lijnen verdelen het platte vlak in vier delen, het $-,-$ het $-,+$ het $+,+$ en het $+,-$ gebied. De oorsprong ligt steeds in het $-,-$ gebied.

De bisectrices van de hoeken van deze lijnen hebben tot vergelijkingen $f(x, y) \pm \varphi(x, y) = 0$.

$f(x, y) - \varphi(x, y) = 0$ is de vergelijking van de bisectrix door het $+,+$ en het $-,-$ gebied want, is x_1, y_1 een punt van deze bisectrix, dan zijn $f(x_1, y_1)$ en $\varphi(x_1, y_1)$ gelijk. Deze bisectrix loopt dus door het gebied, waarin de oorsprong ligt.

Dit feit maakt het mogelijk snel te bepalen, welke vergelijking men aan een bepaalde bisectrix moet toekennen.

A. KETTNER.

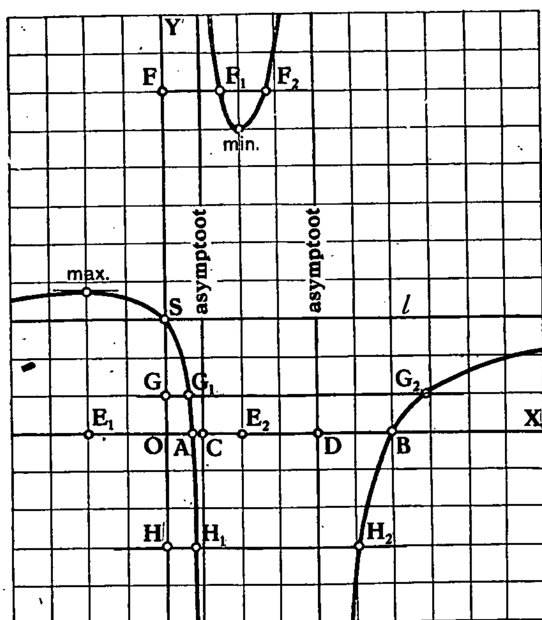
LXIV.

MEETBARE EXTREMA VAN $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$.

Onderstel a, p en c, r ongelijk aan 0; de horizontale asymptoot l heeft tot vergelijking $y = \dfrac{a}{p}$; als l de kromme in S snijdt en S ligt op de y-as, dan is de ordinaat van het snijpunt $y = \dfrac{c}{r}$; dus is dan $\dfrac{a}{p} = \dfrac{c}{r}$; dat is: $y = \dfrac{ax^2 + bx + ka}{px^2 + qx + kp}$ *wordt door zijn horizontale asymptoot gesneden in S, op de y-as.*

We snijden de kromme met $y = m$ en vinden de abscissen van de snijpunten uit de vierkantsvergelijking $(a - mp)\,x^2 + (b - mq)\,x + k\,(a - mp) = 0$; hiervan is $x_1\,x_2 = k$, zodat het product der wortels onafhankelijk is van m. De projecties van de paren snijpunten op de x-as vormen dus de puntenparen van een involutie, met O (de projectie van S) als centrum. Voor positieve k zijn er twee dubbelpunten, waarvan de abscissen zijn $\sqrt{k}$ en $-\sqrt{k}$; deze zijn de projecties van de abscissen der extrema. Zie de figuur; hierin is $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = OE_1^2 = OE_2^2 = 4$; A en B vindt men

voor $m = 0$, C en D zijn de projecties op de x-as van de snijpunten van de kromme met $y = m \rightarrow \infty$. Snijdt men met $y = \frac{a}{p}$, dan vindt men als snijpunten S en het punt op oneindig; hun projecties zijn O en het punt op oneindig op de x-as. Om de x-as niet te veel te belasten met letters, hebben we nog de snijpunten getekend met $y = 9$, $y = 1$ en $y = -3$; men vindt $\overrightarrow{FF_1} \times \overrightarrow{FF_2} = \overrightarrow{GG_1} \times \overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{HH_1} \times \overrightarrow{HH_2}$.



$$y = \frac{3x^2 - 20x + 12}{x^2 - 5x + 4}.$$

Het bovenstaande heeft bijzondere waarde voor het onderwijs; wil men nl. direct een voorbeeld hebben van een gebroken functie als boven, waarvan de extrema behoorlijk uitkomen, neem dan voor k een of ander kwadraat b.v. $y = \frac{x^2 \ldots\ldots + 1}{x^2 \ldots\ldots + 1}$, $y = \frac{x^2 \ldots\ldots + 9}{3x^2 \ldots\ldots + 27}$; de middelste term van de teller kan men dan zo kiezen, dat er twee verschillende of twee samenvallende of geen nulpunten zijn; de middelste term van de noemer kieze men zo, dat er twee verschillende, twee samenvallende of geen verticale asymptoten zijn.

Neemt men k negatief, dan heeft de involutie geen dubbelpunten en er zijn dan geen extrema. Meer behoeven we er niet van te zeg-

gen. Bij het opgeven van schriftelijk werk kan men uit de vergelijking in bovenstaande vorm een andere afleiden door verschuiving van de y-as; alles komt even goed uit; alleen zijn abscissen van de extrema dan niet elkaars tegengestelde.

Het bovenstaande is geschreven naar aanleiding van een artikeltje van Ir. Simon Thomas, leraar aan de Gooise H.B.S. te Bussum, in het Nieuw Tijdschrift voor wiskunde Jg. 31 afl. III, IV, die naar zijn en mijn beste weten de prioriteit heeft over het ontdekken van de involutie op de x-as van de paren abscissen der snijpunten van $y = m$ met de grafiek van $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$.

P. W.

BOEKBESPEKINGEN.

Simon Stevin door Dr. E. J. Dijksterhuis. *Met afbeeldingen en 6 platen. — 's-Gravenhage, Martinus Nijhoff, 1943.* — 380 blz., gr. 8°; prijs *f* 12,60; geb. *f* 14,—.

„Simon Stevin, geboren te Brugge in 1548 of 1549, sinds 1581 verblijvende in de Noordelijke Nederlanden, sinds omstreeks 1593 in dienst van prins Maurits, sinds 1604 „Quartiermeester tot het afsteecken der quartieren", overleden vermoedelijk te 's-Gravenhage in Maart 1620 en schrijver der *Wisconstighe Gedachtenissen*" zou een al te korte mededeeling omtrent hem kunnen luiden. Op Stevin's levensloop en werkzaamheid op velerlei gebied is intusschen reeds de aandacht gevestigd in verschillende geschriften, niet alleen in de vorige eeuw, maar vooral in de tegenwoordige. Aan die recente studies heeft de Heer Dijksterhuis zelf een niet gering aandeel gehad; thans heeft hij ons verrast met het lijvig werk, waarvan hierboven de titel is weergegeven. In dat werk zijn niet alleen de bekende gegevens verwerkt, maar zijn deze ook op uitgebreide wijze aangevuld, zoodat een zooveel mogelijk volledig beeld van Stevin's leven is gegeven, gepaard met een uitvoerige, even grondige als nauwkeurige, uiteenzetting van zijn wetenschappelijke praestaties. Ook de belangstelling van tijdgenooten, met name van prins Maurits, in Stevin's werk komt daarbij tot haar volle recht.

De schrijver heeft zijn werk verdeeld in achttien hoofdstukken, waarvan hier een korte opsomming moge volgen: *I. Het leven* (blzz. 1—32); *II. De werken* (33—64) (bibliographie); *III. Wiskunde* (65—111) (met o.a. een uiteenzetting der beteekenis van de ingevoerde decimale positie-breuk); *IV. Mechanica* (112—134) (met de redeneering betreffende de onmogelijkheid van een perputuum mobile, door middel van de „clootcrans"); *V. Hydrostatica* (135—145) (waarin het „duikerprobleem", d.w.z. hoe het komt dat een duiker niet verpletterd wordt door het gewicht van het boven hem staande water, benevens het hydrostatisch paradoxe [1]); *VI. Astronomie* (146—167) (theorie, waarbij Stevin zich aanhanger

---

[1]) Hiermede in verband staat wel de stelling van Stevin dat de kracht uitgeoefend door den zuiger van een pomp onafhankelijk is van de doorsnede van den aanvoerbuis, uiteengezet in Stevin's verloren gegane *Lochtwicht*, maar aangegeven door zijn zoon Hendrick (*Wisc. Filos. Bedrijf, 1667,* Bk XII, blz. 22).

toont van het stelsel van Copernicus; eb en vloed[1])); *VII. Geographie* (168—174); *VIII. Zeevaartkunde* (175—189) (lengtenbepaling; „havenvinding"); *IX. Techniek* (190—221) (watermolens, zeilwagen ([2]) en sluizen); *X. Krijgswetenschap* (222—247) (versterkingskunst, legermeting en verschillende onderwerpen); *XI. Boekhouden* (248—260) (koopmans- en vorstelijke boekhouding); *XII. Bouwkunde* (261—269) (stedenbouw en woonhuisbouw ([3])); *XIII. Muziek* (270—276) (hierin Stevin's propaganda voor de „gelijkzwevende temperatuur"); *XIV. Burgerlijke stoffen* (277—286) (de burger, de vorst, verschillende onderwerpen); *XV. Logica* (287—297) (leer der syllogismen); *XVI. Stevin en de Nederlandsche taal* (298—320) (beschouwingen over en bijdragen tot de taal); *XVII. Stevin en Maurits* (321—332) en *XVIII. Stevin's persoonlijkheid* (333—341). Een uitvoerige lijst van geraadpleegde werken (blzz. 342—353), een weergave van brieven van Stevin (354—357) en een uitgebreid register (358—379) besluiten het werk, dat bovendien nog een groot aantal figuren en afbeeldingen bevat, o.a. van het portret van Stevin, bewaard op de universiteitsbibliotheek te Leiden, van prins Maurits en van de zeilwagen. De uitgave is keurig verzorgd, zooals men dat van de firma Nijhoff gewoon is.

Met zijn werk heeft de Heer Dijksterhuis tweeërlei doel gehad, zooals hij ons (blz. 31) mededeelt, nl. „dat het nog eens allen, die hier en buiten onze landsgrenzen de Nederlandsche taal spreken en in de Nederlandsche beschaving belangstellen, op de groote beteekenis wil wijzen, die voor beide aan Stevin toekomt. Dit is het eerste doel. Het tweede is, het besef te doen ontstaan van wat wij aan zijn nagedachtenis verschuldigd zijn. Die schuld laat zich in

---

[1]) Men kan zich afvragen of Stevin de astronomie ook niet practisch heeft beoefend. Maurits had op het Hof een kleine sterrewacht doen bouwen en Arend van Buchell noteerde op het jaar 1598: „vidi turrim astrologicam, in Aula erectam jussu Mauritii, qui summe se ejusmodi studiis delectare fertur" (*Diarium,* ed. Brom en Van Langeraad, *Amsterd., 1907,* blz. 473). Bekend is hoe Maurits zich in 1608 interesseerde voor de toen bekend geworden verrekijker. Scheiner, bekend door de prioriteitsstrijd over de ontdekking der zonnevlekken, noemt in zijne *Accuratior disquisitio* van 1612 onder de uitstekende mannen, die hunne meening omtrent den aard dier vlekken hebben kenbaar gemaakt: „in Belgio doctissimus vir Simon Stevinius". Zou er contact hebben bestaan tusschen Stevin en den anonymen schrijver van het zeldzame werkje *de Maculis in Sole animadversis . . . . in publica luce expositis. Batavi dissertatiuncula ad Amplissimum nobilissimumque virum Cornelium van der Millium (Lugd. Bat. 1612)?*

[2]) Een kleine bijdrage tot de geschiedenis van deze vinding levert nog *Bengt Ferrner's Dagboek . . . . in 1759,* ed. Kernkamp (*Bijdr. en Meded. Hist. Gen., dl. XXXI,* 344—345).

[3]) In dit werk behoort wel thuis Stevin's stelling: „Houdt is meer dan viermael stercker dan syn gekloven vierendeel" (*Journaal van Beeckman, II,* pp. 299, 401 en 412).

enkele woorden omschrijven: wij moeten voor Stevin het eenige monument oprichten, waardoor men iemand, die de resultaten van zijn werk in geschriften heeft neergelegd, werkelijk en duurzaam eeren kan: wij moeten een volledige uitgave van zijn werken tot stand brengen". Moeilijkheden zal o.i. een dergelijke uitgave medebrengen ten opzichte van de handschriftelijke nalatenschap van Stevin, reeds kort na zijn overlijden in wanorde geraakt en slechts ten deele bewaard. Die moeilijkheden blijken reeds uit de omstandigheid, dat zij door Stevin's zoon Hendrik op verschillende wijzen, meer of minder gelukkig, tot afzonderlijke deelen is verwerkt. Zij schijnen dan ook alleen te zullen kunnen worden opgelost door den schrijver zelf van het aangekondigde werk, aan wien ieder rechtgeaard vaderlander dank zal weten voor de magistrale en boven onzen lof verheven wijze waarop hij zijn voorloopige taak heeft vervuld.

C. de Waard.[1])

Jhr. Dr. G. J. Elias, *Theorie der wisselstroomen*, Groningen, P. Noordhoff N.V., 1943, XII + 572 bladzijden, prijs *f* 15,—* ing., *f* 16,50* geb.

In het leven van onze tijd domineert de techniek en de moderne techniek is ondenkbaar zonder de electriciteit. Vooral dank zij de toepassing van de wisselstromen heeft de electriciteit een vrijwel alles beheersende plaats in de moderne maatschappij kunnen innemen. Onverschillig of het nu de gloeilampen zijn waarmee we onze huiskamer verlichten dan wel de peiltoestellen waarmee de luchtlegioenen door nacht en duisternis naar hun doelen geleid worden, of het nu de radiotoestellen zijn waarmee we van minuut tot minuut getuigen kunnen zijn van de hysterische krampen van het huidige wereldgebeuren dan wel de gigantische generatoren die onze fabrieken van energie voorzien, heel die veelheid van vormen, al die manifestaties van menselijke activiteit worden beheerst door het ene magische begrip, de wisselstromen. Door hun merkwaardige eigenschappen hebben de wisselstromen de weg naar de oplossing van tal van problemen geëffend en daarmee vele wensdromen in vervulling doen gaan.

Maar achter die verscheidenheid van technische toepassingen, achter die bijkans onoverzienbare veelheid van apparaten en machines, staan steeds weer dezelfde wetten en die wetten zijn onveranderlijk geschreven in dezelfde taal, de wiskunde; de mathematische formules zijn de sleutels, waarmee het wonderrijk der wisselstromen ontsloten kan worden.

Prof. Elias heeft de taak op zich genomen ons in een deel van dat rijk binnen te voeren; het boven aangekondigde werk is ontstaan uit aan de T. H. te Delft gegeven colleges en houdt zich alleen met

[1]) Voor de lezers, die het niet weten, zij vermeld dat De Waard de bewerker is van het *Journal tenu par Isaac Beekman;* Deel I en II hiervan zijn verschenen, III en IV zijn in voorbereiding; uitgave van Martinus Nijhoff; prijs per deel *f* 23,60. P. W.

de wiskundige theorie van de wisselstromen bezig. Het kan daarom zonder bezwaar ter hand genomen worden door iemand die van de electrotechniek niets of nagenoeg niets afweet.

Voor den wiskundige is ongetwijfeld het meest interessante hoofdstuk het vijfde, waarin de operatorenrekening volgens Heaviside behandeld wordt. Heaviside was een Engels electrotechnisch ingenieur, autodidact, die een op het eerste gezicht verbluffende methode heeft verzonnen voor de oplossing van bepaalde typen van differentiaalvergelijkingen. We willen deze methode aan de hand van het volgende eenvoudige voorbeeld toelichten. We beschouwen de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} + y = 1.$$

De operator $\frac{d}{dx}$ wordt door de letter p voorgesteld en als een getal behandeld, zodat de gewone rekenregels van toepassing verklaard worden. We kunnen dan voor de gegeven vergelijking schrijven:

$$(p+1)y = 1,$$

en oplossing naar y geeft:

$$y = \frac{1}{p+1}.$$

Het rechterlid wordt ontwikkeld in een oneindige reeks naar machten van $\frac{1}{p}$; we vinden:

$$y = \frac{1}{p}\frac{1}{1+\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \ldots\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \ldots$$

We kunnen $\frac{1}{p}$ in zekere zin opvatten als de inverse operator van $\frac{d}{dx}$, we beschouwen dus $\frac{1}{p}$ als een symbool voor een integratieproces. Zo kan men er toe komen te schrijven:

$$\frac{1}{p} = \int_0^x 1dx = x, \quad \frac{1}{p^2} = \int_0^x x dx = \frac{1}{2!}x^2, \ldots,$$

$$\frac{1}{p^n} = \int_0^x \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n!}x^n.$$

Voor y vinden we dan:

$$y = x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \ldots = 1 - e^{-x}.$$

waarmee blijkbaar dié oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking gevonden is, die voor $x = 0$ de waarde nul aanneemt.

Voor de verkrijging van deze en analoge uitkomsten is door

Heaviside een algemeen voorschrift gegeven. Laat gegeven zijn een lineaire differentiaalvergelijking van de $n$de orde met constante coëfficienten en constante storingsterm:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = a.$$

Hiervoor kan men symbolisch schrijven:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu p^\nu = a,$$

of korter:

$$H(p) = a.$$

Zijn nu de getallen $p_1, \ldots, p_n$ de nulpunten van het polynoom $H(p)$, waarvan we onderstellen dat ze alle verschillen, dan is

$$y = \frac{a}{H(0)} + a \sum_{\nu=0}^{n} \frac{e^{p_\nu x}}{p_\nu H'(p_\nu)}$$

dié oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking, welke voor $x = 0$ de waarde nul aanneemt. Dit is het beroemde expansie-theorema van Heaviside; een bewijs daarvan is door hem nimmer meegedeeld, waarschijnlijk heeft hij het „experimenteel" gevonden.

De hier in enkele trekken aangeduide rekenwijze staat bekend als de operatorenrekening. Het is gebleken dat de methode uitstekend geschikt is voor de berekening van inschakelverschijnselen welke in electrische systemen kunnen optreden en is daarom vooral bij de electrotechnici bizonder geliefd. De wiskundige fundering van de rekenmethode is geenszins triviaal en heeft overigens aan het licht gebracht dat de toepassing er van op partiële differentiaalvergelijkingen slechts met omzichtigheid mag geschieden. De methode van Heaviside was trouwens in wezen bij de wiskundigen reeds lang bekend, namelijk in de theorie der functionaaltransformaties, waartoe de transformatie van Laplace en derg. behoren. Daarmee wordt echter aan de verdienste van Heaviside niets te kort gedaan.

In het boek van Prof. Elias wordt op de mathematische grondlegging van de operatorenrekening uitvoerig ingegaan, in het bizonder op een door Bromwich ontwikkelde methode. Met behulp van contourintegratie en residuenstelling wordt het expansietheorema van Heaviside bewezen (de schrijver verzuimt er op te wijzen dat de nulpunten van het polynoom $H(p)$ alle verschillend ondersteld moeten worden). Voorts wordt nog even melding gemaakt van een door Carson aangegeven oplossing; het blijkt dat door het integraaltheorema van Fourier verband gelegd kan worden tussen de oplossingen van Bromwich en Carson.

Aan het integraaltheorema van Fourier is een afzonderlijk hoofdstuk gewijd; namelijk het vierde. Het theorema wordt bewezen door middel van een limietovergang toegepast op een reeks van Fourier. Deze limietovergang is uit een oogpunt van mathematische strengheid nogal roekeloos, maar bezit het voordeel van aanschouwelijkheid. Het integraaltheorema van Fourier verschaft bijvoorbeeld inzicht in de verschijnselen welke optreden in netwerken

wanneer men gedurende een bepaald tijdvak een constante of een intermitterende EMK inschakelt. Op dit en verwante problemen wordt in dit hoofdstuk nader ingegaan.

Het spreekt wel vanzelf dat in een boek over wisselstroomtheorie de reeksen van Fourier niet ontbreken; ze vormen het onderwerp van het derde hoofdstuk. De schrijver legt vooral de nadruk op de practische kant van de theorie. Wel worden de voorwaarden (van Dirichlet) geformuleerd, welker vervuldzijn voor een functie de ontwikkelbaarheid in een reeks van Fourier garandeert, maar bewijzen daarvoor treft men niet aan; natuurlijk kan men dienaangaande door ieder behoorlijk leerboek der analyse in voldoende mate ingelicht worden. Een drietal methoden wordt besproken waarmee men voor empirisch gegeven functies de Fourier-coëfficiënten kan berekenen, wanneer men ten minste niet de beschikking heeft over speciale daarvoor geschikte apparaten (harmonische analysatoren).

Veel meer electrotechnisch georienteerd zijn de eerste twee en de laatste drie hoofdstukken, waarvan de eerstgenoemde zeer elementair zijn en bijvoorbeeld door iemand met niet meer dan een M.T.S. opleiding gelezen kunnen worden.

In hoofdstuk I worden de electrische trillingsketens besproken, waarbij zowel de directe berekeningsmethode als de symbolische rekenwijze met complexe getallen uitvoerig ter sprake komen. Daarnaast worden de grafische methoden niet vergeten; het is interessant op welke wijze elementair-geometrische vraagstukken bij deze dingen een toepassing vinden.

Direct bij het onderwerp van het eerste hoofdstuk sluit dat van het tweede aan, namelijk de theorie van de gekoppelde kringen. Uitvoerig worden hierbij de verschillende mogelijkheden van koppeling onderzocht en zelfs een algemene theorie voor het geval van n gekoppelde ketens gegeven. Van de vele toepassingen die men kan maken vermeld ik nog even afzonderlijk de theorie van de Rhumkorff-inductor, die, dunkt mij, voor menig leraar in de natuurkunde nog wel iets nieuws bevat.

In het zesde hoofdstuk worden de meerphasensystemen aan de orde gesteld met hun aanwending voor de opwekking van roterende velden. Het bizondere geval van het driephasensysteem (draaistroom) neemt daarbij een aparte plaats in.

Zeer belangwekkend, zowel uit een mathematisch als uit een technisch oogpunt zijn de laatste twee hoofdstukken, waarin de theorie der lange leidingen, dus telefoonleidingen, kabels en d.g., besproken wordt. Bij de ingebruikneming van zeer lange kabels, zoals die bijvoorbeeld nodig zijn bij trans-oceanische verbindingen, deed men meer dan eens zeer merkwaardige ervaringen op, waarvan de theorie naderhand volledig rekenschap kon geven en ook de remedie tegen bepaalde moeilijkheden aan de hand wist te doen. Bijvoorbeeld de storende invloed welke de demping op het overbrengen van signalen heeft en de verbetering die men kan verkrijgen door de verhoging van de zelfinductie door middel van z.g. Pupinspoelen. Maar ook meer recente problemen zoals de meest effectieve energieoverdracht langs antennevoedingssystemen van radiozenders

en dergelijke meer kunnen langs theoretische weg volledig worden beheerst. Een geheel complex van vragen wordt in het zevende hoofdstuk besproken, waarbij vooral de op de demping betrekking hebbende probleemstellingen bizonder belicht worden.

In het achtste hoofdstuk ligt het zwaartepunt bij de inschakelverschijnselen en hun gedrag bij verschillende onderstellingen aangaande de ingangs- en eindimpedantie. De exacte doorvoering van de theorie stuit in vele gevallen door het optreden van ingewikkelde formules op bezwaren; vandaar dat men voor de verkrijging van een overzicht genoopt wordt bepaalde vereenvoudigende onderstellingen te maken. Op welke wijze dit dient te geschieden en welke mogelijkheden zich daarbij kunnen voordoen wordt alles uitvoerig onderzocht.

Vooral door de sobere en duidelijke betoogtrant, mede door de goed gekozen notatie, levert de bestudering van het boek van Prof. Elias niet meer moeilijkheden op dan de aard van het onderwerp meebrengt. De berekeningen zijn merendeels in extenso weergegeven, zodat voor den lezer over het geheel genomen weinig te doen overblijft. Ook buiten de kring der electrotechnici verdient het boek de belangstelling van een ieder die interesse heeft voor de toegepaste wiskunde. De uiterlijke verzorging van het boek is in elk opzicht nog zo als we voor de oorlog gewend waren.

J. C. H. Gerretsen.

Ir. R. J. Legger, *Aerodynamica*. Amsterdam, „De technische boekhandel", H. Stam. Stuk A, 1942, prijs *f* 9,75; stuk B, 1943, prijs *f* 8,75.

Om meer dan een reden geniet de luchtvaart de bizondere belangstelling van de jeugd en de leraar die in staat is de weetgierigheid van zijn leerlingen op dit gebied enigermate te bevredigen staat bij haar in de regel goed aangeschreven [1]). De wiskunde heeft in dit onderdeel van de techniek een uitgebreid en vruchtbaar veld van toepassing gevonden en vooral de mathematische behandeling van het probleem op welke wijze een lichaam zwaarder dan lucht door geschikte vormgeving in staat is zich van de begane grond te verheffen, is buitengewoon belangwekkend. Daarom zullen velen die zich voor dit en aanverwane problemen interesseren den heer Legger dankbaar zijn, dat hij de niet gemakkelijke taak op zich genomen heeft een inleidend werk te schrijven over aerodynamica, waarin de wiskundige grondslagen van de theorie van het vliegen worden besproken. Te meer omdat van den lezer geen specifieke voorkennis geëist wordt; met de schoolwiskunde en de beginselen van de differentiaalrekening, naast enkele eenvoudige zaken uit de mechanica, kan worden volstaan. Het werk bestaat uit tien hoofd-

---

[1]) In verband hiermede zou ik ter algemene oriëntering willen wijzen op een vooral uit didactisch oogpunt bizonder fraai werkje: C. G. de Kat, *Hoe wij vliegen, Theorie van de luchtvaart.* Haarlem 1940.

stukken, welke over twee „stukken" A en B, tezamen 553 bladzijden tellend, verdeeld zijn.

Alvorens mijn oordeel over dit boek uit te spreken, zou ik eerst een summier overzicht willen geven van de inhoud, ten einde een indruk te geven van de veelheid der ter sprake komende onderwerpen.

Op het inleidende hoofdstuk, dat enige algemene mathematische en physische zaken bevat, volgt het uitvoerige tweede hoofdstuk, waarin de aerodynamische grondvergelijkingen afgeleid worden, te weten: de continuïteitsvergelijking en de beroemde differentiaalvergelijkingen van Navier—Stokes; het onderzoek blijft niet alleen beperkt tot het geval van de ideale vloeistoffen en gassen, maar de invloed van de inwendige wrijving, de taaiheid, wordt evenzeer in rekening gebracht Daarbij leert men de beide in dit gebied gebruikelijke beschouwingswijzen kennen: de „locale", waaraan de naam van Euler is verbonden, en de „substantiële", welke op Lagrange teruggaat. De schrijver bepaalt zich in de verdere delen van het werk in hoofdzaak tot de eerstgenoemde beschouwingswijze.

Een kort hoofdstuk over de hydro- en aerostatica gaat vooraf aan het vierde hoofdstuk, waarin meer in het bizonder wordt nagegaan welke gevolgtrekkingen men kan maken, zodra de inwendige wrijving niet in rekening gebracht behoeft te worden. Men bevindt zich dan op het terrein van de klassieke hydrodynamica, waarin begrippen als potentiaalstroming en derg. een belangrijke plaats innemen. De mathematische beschrijving van de verschijnselen vertoont een opvallende analogie met de theorie van het electromagnetische veld, die zich onder meer openbaart in de wet van Biot en Savart, waarmee men op overzichtelijke wijze de door eenvoudig gevormde werveldraden in het stromingsveld geïnduceerde snelheden kan berekenen. Vooral in de moderne theorie van de draagvlakken en de schroef blijken deze beschouwingen van veel nut te zijn.

In het vijfde hoofdstuk zijn vragen die met de energieverdeling in het stromingsveld verband houden aan de orde en wordt voorts de beroemde wet van Bernoulli afgeleid, die in de dynamica van ideale vloeistoffen en gassen zulk een dominerende plaats inneemt. Als belangrijke toepassing wordt de theorie van de snelheidsmeting ontwikkeld, zoals die kan geschieden met druksonden en Venturibuizen, waarbij tevens nauwkeurig wordt nagegaan, welke invloed de samendrukbaarheid van het gas op de resulaten heeft.

Op welke wijze in een stromingsveld draagkracht opgewekt kan worden kan men lezen in hoofdstuk VI. Daarin wordt uitvoerig de stroming om een roterende cylinder bestudeerd en de daarmee samenhangende verschijnselen. In verband daarmee dringt zich het probleem van de superpositie van stromingsvelden naar voren; de situatie is hier ingewikkelder dan in het electromagnetische veld, omdat de aerodynamische grondvergelijkingen niet lineair zijn.

Met het zevende hoofdstuk betreden we het terrein van de eigenlijke vliegtechniek. Hier wordt — zij het op een wijze die aanvulling behoeft — de stelling van Kutta—Joukowsky bewezen, die het

verband aangeeft tussen draagkracht en circulatie (de lijnintegraal van de snelheid langs een gesloten kromme) om een vleugelprofiel, in de onderstelling dat de vleugel oneindig lang is.

Deze onderstelling wordt in het achtste hoofdstuk opgeheven en onderzocht wordt welke invloed de eindige lengte van een vleugel op de stroming heeft. Het blijkt dat deze invloed bestaat in een weerstand — wanneer de vleugel in een parallele stroming geplaatst is — de z.g. geïnduceerde weerstand, die volgens een door Prandtl en zijn leerlingen ontwikkelde methode berekend kan worden. In het bijzonder wordt nagegaan onder welke omstandigheden bij gegeven draagkracht de geïnduceerde weerstand minimaal is. Tevens maakt men kennis met de z.g. polaire diagrammen, een voor het onderzoek van vliegtuigpraestaties zeer veel gebruikt hulpmiddel en leert men de omrekening van karakteristieke grootheden (zoals draagkracht- en weerstandscoëfficienten) voor vleugels met verschillende slankheden.

De in het achtste hoofdstuk gevonden resultaten dienen mede als grondslag voor de in het negende hoofdstuk ontwikkelde theorie van de schroef. De eerste helft van dit hoofdstuk bevat een meer phaenomenologische behandeling, die naderhand verdiept wordt door een gedetailleerd onderzoek, waarbij op het mechanisme van de om de propeller optredende stroming nader wordt ingegaan. Ter verduidelijking is een numeriek voorbeeld doorgerekend.

Hoofdstuk X is in vele opzichten een voortzetting van hoofdstuk II. De invloed van de taaiheid van de vloeistof op de stromingsverschijnselen wordt nagegaan en het geval van een stroming tussen twee parallele vlakke platen bestudeerd, met als punt van uitgang de differentiaalvergelijkingen van Navier—Stokes. Voorts treft men in dit hoofdstuk beschouwingen aan over gelijkvormigheid van bewegingstoestanden en de modelregels van Froude en Reynolds, die van eminent belang zijn voor de metingen aan modellen in sleeptank, resp. windtunnel. Verder wordt de van Prandtl afkomstige theorie van de grenslaag aan een nadere beschouwing onderworpen. De klassieke theorie blijkt namelijk niet in staat te zijn van bepaalde in werkelijkheid optredende effecten rekenschap te geven, ook al zou ogenschijnlijk de invloed van de taaiheid verwaarloosd mogen worden; de grenslaagtheorie geeft de vereiste aanvulling en verschaft onder andere inzicht in het ontstaan van de z.g. „aanloopwervel" achter een vleugel, welke de voor de draagkracht noodzakelijke circulatiestroming om die vleugel opwekt. Het hoofdstuk wordt besloten met de bespreking van de bij de beweging van een lichaam in een medium optredende verschijnselen, als de snelheid van het lichaam boven de geluidssnelheid ligt.

Het laatste hoofdstuk, het twaalfde, is gewijd aan de behandeling van de beginselen van de theorie der complexe functies met de toepassing daarvan op de conforme afbeelding van vlakke stromingsvelden. Onder meer wordt de van Trefftz afkomstige constructie besproken, waarmee men een cirkelomtrek kan omzetten in bepaalde vleugelprofielen, de Joukowsky-profielen. Voorts wordt in dit hoofdstuk een in hoofdstuk VII gelaten leemte in het bewijs van de stelling van Kutta—Joukowsky aangevuld,

terwijl het hoofdstuk besloten wordt met het stabiliteitsonderzoek van draagvlakken.

Bij de beoordeling van de wiskundige kwaliteiten van een werk als het hier gerecenseerde, moet natuurlijk in aanmerking genomen worden, welk doel de schrijver zich gesteld heeft en welke lezerskring hij getracht heeft te bereiken. Blijkens de tot in de kleinste bizonderheden gegeven afleidingen van de formules, zodat de bestudering van het boek zeer weinig inspanning vergt, wilde de schrijver kennelijk ook de in de wiskunde weinig bedreven lezer tot volhouden aanmoedigen. Onder deze omstandigheden is het dan ook haast niet te vermijden, dat de mathematische behandeling van de theorie niet steeds onberispelijk is. Voor een niet gering deel is dit een gevolg van de beperking welke de schrijver gemeend heeft zich te moeten opleggen, om in het wiskundige deel van zijn lezers niet te veel te vergen. De stelling van Gauss bijvoorbeeld is alleen afgeleid voor het geval van vlakke velden (p. 47). Zodoende kon de schrijver niet beschikken over de bekende formule voor de partiële integratie in de ruimte, welke gemeenlijk naar Green genoemd wordt, waardoor hij een machtig wiskundig hulpmiddel moest ontberen. De gevolgen zijn dan ook niet uitgebleven; het bewijs bijvoorbeeld van de symmetrie van de spanningstensor (p. 59) is nu tot mislukking gedoemd. De schrijver heeft getracht het bewijs te leveren met een nogal zonderling betoog, waarin vooral veel gewerkt wordt met oneindig kleinen van verschillende orde, maar waaraan men toch feitelijk geen behoorlijke zin kan verbinden. Eveneens waardeloos zijn de beschouwingen op p. 161 die betrekking hebben op de energieverdeling in het stromingsveld. De afleidingen van de impulsiestellingen in hoofdstuk XI zouden eleganter geworden zijn, wanneer de schrijver de beschikking gehad zou hebben over de ruimtelijke formulering van de stelling van Gauss. Ook de stelling van Stokes wordt slechts voor het geval van twee dimensies geformuleerd en bewezen (p. 113). De schrijver had zich evenwel de moeite van het geven van twee bewijzen kunnen besparen, doordat hij slechts behoefde op te merken, dat in twee dimensies de stellingen van Gauss en Stokes niet essentiëel verschillend zijn.

Een geheel overeenkomstig bezwaar treedt naar voren bij het bewijs van de stelling van Lagrange—Thomson betreffende de permanentie van wervelbewegingen (p. 135). De door den schrijver aangevoerde gronden zijn onvoldoende. Zou de substantiële beschouwingswijze in het werk meer tot zijn recht zijn gekomen — de schrijver heeft gemeend deze uit didactische overwegingen op de achtergrond te moeten houden — dan zou wellicht het beroemde bewijs van Helmholtz een plaats hebben kunnen vinden. Ik geef toe dat men zich tot de variabelen van Euler kan beperken, maar dan zal men toch wel een beroep moeten doen op de theorie der lineaire simultane differentiaalvergelijkingen, zoals bijvoorbeeld in het bekende bewijs van Cauchy geschiedt. Hoe het ook zij, de schrijver heeft hier de situatie wel wat te eenvoudig voorgesteld.

Het op zich zelf lofwaardig streven om de te gebruiken wiskundige hulpmiddelen zoveel mogelijk in het boek zelf te ontwikkelen bracht bizondere moeilijkheden mee in hoofdstuk XII, waarin eerst

de beginselen van de complexe functietheorie behandeld worden, alvorens tot de eigenlijke toepassing wordt overgegaan. Ik acht deze inleiding het minst geslaagde deel van het werk. Het hapert hier in hoofdzaak bij de definities. Noch het begrip complex getal, noch het begrip analytische functie zijn door den schrijver behoorlijk gedefiniëerd, zodat de bewijzen van de theorema's volkomen in de lucht hangen; ik zie bijvoorbeeld niet in dat iemand, die nog bijna niets afweet van complexe getallen, plotseling wel begrijpt wat onder de logarithme van een complex getal verstaan moet worden. Laat ik er evenwel direct aan mogen toevoegen dat mijn bezwaren alleen de inleiding van dit hoofdstuk betreffen.

Het is zeer stellig geen gemakkelijke opgave een behandeling te geven van de aerodynamica, die enerzijds geen leemten laat en anderzijds toegankelijk is voor lezers met beperkte wiskundige voorkennis. Al moet dan geconstateerd worden dat de schrijver daarin niet ten volle is geslaagd — en blijkens een mededeling in het voorbericht ook niet pretendeert daarin geslaagd te zijn — het zou onjuist zijn, wanneer men uit de boven opgesomde bezwaren en aanmerkingen de conclusie ging trekken dat in het boek meer te laken dan te prijzen valt. Het tegendeel is waar. De schrijver heeft zich alle moeite gegeven de theorie duidelijk uiteen te zetten en met goed gekozen voorbeelden toe te lichten; daardoor is het boek mede zeer geschikt als inleiding op de grote buitenlandse standaardwerken, waarvan er enige in het literatuurlijstje aan het eind van deel B genoemd zijn. Een belangwekkend en interessant onderdeel van de toegepaste wiskunde is voor een uitgebreide lezerskring toegankelijk geworden en de schrijver verdient daarvoor alle waardering. De typografische verzorging van het boek is uitstekend, hoewel het overweging zou verdienen in een tweede druk de formules cursief te zetten; de tekeningen zijn voortreffelijk van uitvoering.

J. C. H. Gerretsen.

Dr. E. W. Beth, *Summulae logicales. Supplement der formele logica.* (Bibliotheek voor de didactiek van de exacte vakken onder redactie van Dr. J. C. H. Gerretsen. No. 1). Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1942 (8°, 55 pag.; *f* 1,50).

De, aan de lezers van Euclides onder meer door zijn „hoofdstukken uit de moderne formele logica" welbekende schrijver, heeft zich, blijkens zijn voorwoord tot dit geschrift, ten doel gesteld, een ook voor niet mathematisch geschoolde lezers bruikbare inleiding tot de formele logica volgens de moderne opvattingen te geven, en hij is daarin o.i. op zeer gelukkige wijze geslaagd. Zijn, voortdurend door eenvoudige en welgekozen voorbeelden geïllustreerde uiteenzettingen van de logica der proposities (oordeelslogica), die der eigenschappen en die der relaties zijn uit logistisch-formalistisch oogpunt volkomen verantwoord, zonder echter de vorm van een formeel-axiomatische opbouw aan te nemen, wat met het beoogde doel onverenigbaar geweest zou zijn. Schr. zelf noemt trouwens de opzet van zijn werk uit technisch opzicht beschouwd, semantisch.

Bovendien weet schr. voortdurend voeling te houden met de klassiek-Aristotelische logica en ook overigens het historische gezichtspunt voldoende recht te doen wedervaren om ook de belangstelling van de meer literair georiënteerde lezer te boeien. O.i. zeer terecht heeft hij zich daarbij van wijsgerige beschouwingen gespeend en hij geeft dan ook de lezer, die uit zijn werkje lering wil trekken, de verstandige raad, zich van wijsgerige kritiek te onthouden, zolang hij de geboden leerstof niet technisch beheerst. Alleen in een (uiterst beknopt) slothoofdstukje over de kategoriënleer bij Aristoteles en bij Kant heeft schr. zich niet kunnen weerhouden, wat dieper op de wijsgerige ondergrond der logische figuren in te gaan. Het hoofdstukje is door zijn inhoud ongetwijfeld lezenswaard, maar wij krijgen de sterke indruk, dat schrijver hier de lezerskring, die hij zich oorspronkelijk had voorgesteld, uit het oog verliest en zich in gedachten te zeer tot de reeds in de klassieke zowel als in de kritische wijsbegeerte geschoolde lezers richt, om ook voor wie zich daartoe niet mogen rekenen verstaanbaar te blijven; het ware dan ook misschien beter geweest, deze beschouwingen bij wijze van aanhangsel aan het werkje toe te voegen.

Hoe dit zij evenwel, wij twijfelen er niet aan, dat Dr. Beth door het samenstellen van deze zaakrijke en over het algemeen genomen zeer heldere inleiding tot deze moeilijke materie een alleszins nuttig werk heeft verricht.

G. Mannoury.

Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening, met toepassingen op verschillende gebieden, door *Dr. H. J. E. Beth.* 2de druk, 408 pag. Prijs *f* 11,—, geb. *f* 12,05. Oplossingen van de vraagstukken *f* 1,05.

P. Noordhoff N.V., Groningen—Batavia.

Van dit prachtige werk van *Dr. H. J. E. Beth* verscheen de tweede druk, waarvan blijkens het voorbericht de verzorging hoofdzakelijk het werk is van *Dr. E. W. Beth.* Een gevolg hiervan is geweest, dat een aantal onderwerpen, bijna alle van zuiver wiskundige aard nieuw opgenomen zijn en een aantal bewijzen, die aan duidelijkheid te wenschen overlieten aan een herziening zijn onderworpen.

Het boek is voornamelijk bedoeld voor degenen, die de wiskunde niet om haarszelfs wil beoefenen, doch voor wie de wiskunde een hulpwetenschap is, waarbij zooveel mogelijk is aangesloten bij wat het middelbaar onderwijs geeft. Wij mogen dit werk dus noemen voor de studenten van Delft en Wageningen en voor de universiteitsstudenten, die niet de zuivere wiskunde als studievak gekozen hebben: de physici, chemici, biologen, astronomen en nog wel anderen. Dit is ook klaarblijkelijk de bedoeling geweest, welke bij den schrijver heeft voorgezeten. Wij zouden echter verder willen gaan, door nl. te bekennen, dat wij het betreuren dat dit werk niet reeds bestond in het begin van onze eigen studietijd, daar het ook voor mathematici in hun beginstudie niet alleen een prachtig hulpmiddel is om de kloof in hun kennis snel te overbruggen, maar

tevens om spoedig in staat te zijn de Diff.- en Integraalrekening te gebruiken bij hun practica op het Psysisch Laboratorium. Dit werk van *Dr. Beth* brengt nl. het inzicht bij, wanneer de analyse te hulp moet worden geroepen en hoe daartoe de problemen moeten worden ingekleed en juist dit is ook voor vele mathematici in het begin veelal een groote moeilijkheid.

Wij kunnen dit werk ook ten zeerste aanbevelen aan studeerenden voor K V en aan degenen, die deze akte reeds verworven hebben. Dit natuurlijk niet om als voorbereiding voor dat examen te gebruiken, maar met bedoelingen zooals ook *Prof. Hk. de Vries* voor oogen had, toen hij in zijn inleiding tot „Historische Studiën XXI" schreef: „Het doel is, zoo dit noodig mocht zijn den lezer te genezen van den waan als zouden de Wiskunde, de theoretische Mechanica, de theoretische Physica en de theoretische Astronomie afzonderlijke wetenschappen zijn, die in afzonderlijke laadjes bewaard moeten worden, een waan waaraan vooral zij ten prooi dreigen te vallen, die niet in de gelegenheid zijn aan de Universiteit te studeeren, maar zich voorbereiden voor een middelbare akte." Dit citaat drukt precies uit welke bedoeling bij ons voorzit, als wij het werk van *Dr. Beth* voor K V-studeerenden aanbevelen. Een verfrissching van de geest zal het voor deze studeerenden en afgestudeerden zijn eens buiten de eenzijdigheid te treden en te ervaren, hoe de Analyse haar toepassing vindt op de problemen der natuur. „Ieder is, op zijn eigen niveau in staat zich te behoeden voor eenzijdigheid; zijn loon zal dan zijn een nog dieper bewondering, nog grooter liefde voor onze scientia amabilis". (Hk. de Vries).

Leeraren in de Wis- en Natuurkunde en Mechanica aan onze scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs willen wij ook op dit werk van Dr. Beth attent maken. Als in normale tijden weer de grondbeginselen van de Differentiaal- en Integraalrekening worden onderwezen, zij het in bescheiden mate, kan het niet anders of een degelijke kennisneming met dit werk moet een vruchtbare invloed hebben op het te geven onderwijs, nog afgezien van de vele interessante voorbeelden, welke aan dit werk te ontleenen zijn, bijv. Wet van Van der Waals, Harmonische Trilling, Schakeling van elementen, Brekingswet, Bijencel, Minimum van deviatie, Beginsel van Cavalieri, 1e Stelling van Guldin e.a. Zulke voorbeelden pakken meer dan het louter aanleeren van de techniek voor het bepalen van uiterste waarden en een oppervlaktebepaling.

Wij zouden tenslotte eenige op- en aanmerkingen op het werk zelf kunnen maken, op- en aanmerkingen welke echter slechts een gevolg zouden zijn van persoonlijke smaak of voorkeur, maar die niets aan het werk zouden afdoen noch eraan toevoegen. In verband met de belangstelling, die we voor dit werk hopen op te wekken, voor zoover nog noodig, meenen wij echter beter te doen een globaal overzicht van het werk te geven, al is dit jammer genoeg niet mogelijk voor al de problemen buiten de zuiver wiskunde, die in het werk aan de orde komen. Dit zou nl. veel te uitgebreid worden.

In hoofdstuk I t/m. IV worden behandeld de limieten van varianten en functies, continuïteit van functies en de exponentieele en

logarithmische functie, een en ander dienende tot aanvulling van de algebraische kennis. Als zoodanig moet ook worden opgevat hoofdstuk VIII, waarin op beknopte, doch heldere en exacte wijze de theorie der oneindige reeksen wordt uiteengezet. In hoofdstuk VI en VII worden de differentiaalquotienten behandeld, terwijl in hoofdstuk XII het belangrijke begrip differentiaal wordt ingevoerd. De hoofdstukken IX t/m. XI, XIII t/m. XV behandelen de formules en reeksen van Taylor, en het bepalen van maxima en minima voor functies van één of meer veranderlijken. De onbepaalde integraal en de integratie van rationale algebraische, irrationale algebraische en van transcendente functies volgen in de hoofdstukken XVI t/m XIX, waarna in XX t/m XXIV de bepaalde integraal, meetkundige toepassingen, integratie door reeksontwikkeling, reeksen van Fourier en meervoudige integralen aan de orde komen. Hoofdstuk XXV en XXVI geven de behandeling van de lijnintegraal, complexe veranderlijken en functies, hoofdstukken XXVII t/m. XXX de differentiaalvergelijkingen. In hoofdstuk XXX wordt het principe der Variatierekening uiteengezet, waarbij voor uitbreidingen verwezen wordt naar Deel III van *„Leerboek der Diff.- en Integraalrekening"* van *Prof. Hk. de Vries.* Terecht maakt de Schrijver toch een uitzondering voor Isoperimetrische vraagstukken.

Het werk besluit dan met een aanhangsel over de geschiedenis van het ontstaan der infinitesimaalrekening; een algemeene herhaling bestaande uit een verzameling van goed gekozen vraagstukken, waarvan er velen ontleend zijn aan de propaedeutische examens der Technische Hoogeschool te Delft en een uitvoerig en nauwkeurig bijgewerkt register.

Uitvoering en druk zijn als gebruikelijk door Noordhoff uitstekend verzorgd; papier nog van goede kwaliteit.

Roermond. Dr. H. A. Gribnau.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van den schrijver.

Ir. W. J. VOLLEWENS c.i. Repetitie-dictaat Analyse I **4e druk** 157 bladzijden, ruim 500 vraagstukken met de antwoorden; *f* 3,25.
Inhoud: I. Functies. II. Limieten. III. Differentiëren van functies van één onafhankelijk veranderlijke. IV. Het differentiëren van impliciet gegeven functies van één onafhankelijk veranderlijke. V. Theorema van Rolle; middelwaardestellingen; formules van Taylor en Mac Laurin; reeksontwikkeling. VI. Onbepaalde vormen; maxima en minima. VII. Onbepaalde integralen.
De 3e druk verscheen ongeveer 1½ jaar geleden; een bewijs, dat het boek gretig aftrek vindt; dit verdient het ten volle; niet alleen voor „Delft" maar ook voor hen, die zich voorbereiden voor K V, bevat het in beknopte vorm heel veel. De 4e druk verschilt niet noemenswaard van de 3e; alleen zijn er wat nieuwe en andere vraagstukken in opgenomen.

Van P. Noordhoff, Groningen.

H. G. A. VERKAART. Gids voor het examen Wiskunde L.O. **5e druk**, bezorgd door H. Herreilers. 177 blz. *f* 3,40; gec. *f* 3,80.
Inhoud: Vraagstukken 1930—1942 van Nederland, 1926—1939 van Oost-Indië, alle met de antwoorden; benevens vragen van de mondelinge examens in Algebra, Vlakke Meetkunde, Stereometrie en Driehoeksmeting, van elk vak 250.
Dit boek is onmisbaar voor opleiders voor deze akte.

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET. Logarithmen-, intrest- en discontotafels; tafel E; **4e druk** 144 blz. gec. met hulpboekje *f* 3,40.
Inhoud: Logarithmen van de getallen 1—10800 in 5 decimalen en verder de volgende tafels over 100 termijnen in 8 dec. voor de percenten ½—8 met ½ % opklimmend, tafel I, II en V met ¼ %.

$$\text{I } (1+i)^n; \quad \text{II } (1+i)^{-n}; \quad \text{III } \sum_{n=1} (1+i)^n; \quad \text{IV } \sum_{n=1} (1+i)^{-n};$$

$$\text{V annuïteitentafel}; \quad \text{VI } (1-d)^n; \quad \text{VII } (1-d)^{-n};$$

$$\text{VIII } \sum_{n=1} (1-d)^{-n}; \quad \text{IX } \sum_{n=1} (1-d)^{-n}; \quad \text{X } \left\{\sum_{k=0}^{n-1} (1-d)^k\right\}^{-1}.$$

P. WIJDENES. Rentetafels D, **3e druk** *f* 0,52⁵. De tafels I—V van tafel E van 2—6 % met ½ % opklimmend en over 50 termijnen.

P. WIJDENES. Beknopte Algebra II **8e druk** gec. *f* 1,80.
Grafiekenschrift **10e druk** *f* 0,52[5].

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE. Rekenboek voor de H.B.S. I **19e druk** gec. *f* 1,85.

Prof. Dr. M. VAN HAAFTEN. Elementaire Levensverzekeringswiskunde I. Netto premiën van verzekeringen op één leven; 164 blz. *f* 3,90; geb. *f* 4,75.
Inhoud: I. Intrestrekening. II. Sterftetafels. III. Verzekeringen van kapitaal en van rente bij leven. IV. id. bij overlijden. V. Veranderende lijfrente en veranderende premiën. VI. Veranderende verzekeringen bij overlijden.

INHOUD VAN DE 20e JAARGANG 1943/'44.

OVERZICHT

van de inhoud van het tweede tiental jaargangen van het tijdschrift EUCLIDES; jg. 1934/'35 tot en met jg. 1943/'44.

Artikelen.

OVERZICHT VAN DE ONDERWERPEN

in de jaargangen XI—XX van EUCLIDES behandeld; onder de namen hierbij vermeld, vindt men de volledige titel van de artikelen.

I. *Wis- en natuurkunde in het algemeen* (didaktiek).
E. W. Beth, H. J. E. Beth, Bottema, Bremekamp, Bruins, Coster, Dijksterhuis, Ehrenfest, Grosheide, Heyting, Kramers, Van Os, Révész, Schamhardt, Schogt, Steller, Verrijp, Wansink, Van Wijk, Zuster F.
II. *Organisatie van het onderwijs,* Schrek, Van Wijk.
III. *Philosophie,* E. W. Beth.
IV. *Geschiedenis,* Dijkstra, Turkstra, Hk. de Vries.
V. ALGEBRA:
Didaktiek, Wansink, Wijdenes.
Ontw. getalbegrip, Wansink.
Functiebegrip, Buzeman, Van der Corput, Gerretsen, Ridder.
Differentiaal- en integraalrekening, Alders, H. J. E. Beth, Gerretsen, Stoelinga en Van Tol.
Logarithmen, Kruytbosch.
Waarschijnlijkheidsrekening, Van Rooyen.
Invarianten, Griss.
$y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ Alders, Bottema, Gerretsen, Van Gruting.
Wortelvormen, E. W. Beth, Bottema.
Tafels, Eilander, Gerretsen, Harkink, Staring, Wijdenes.
VI. MEETKUNDE:
Algemeen, Dijksterhuis, Gerretsen, Haalmeyer, Haantjes, Lorey, Van der Woude, Van Wijk.
Didactiek, H. J. E. Beth, Van Thijn, Vredenduin.
Planimetrie, Bottema, Bronkhorst, F. Brouwer, Reuvecamp, Roborgh, Schaake, Veldkamp, Verrijp, Wijdenes, Van IJzeren.
Stereometrie, Alders, Harlaar, Hartung, Kroon, Van de Putte, Schogt, Swierstra.
Beschrijvende meetkunde, G. Wolff, Wijdenes.
Niet-Euclidische meetkunde, Barrau.
Analytische meetkunde, Van der Corput.
VII. GONIO- EN TRIGONOMETRIE, Van der Corput.
VIII. MECHANICA, Staring.
IX. STERRENKUNDE EN KOSMOGRAFIE, Van Rhijn, J. F. de Vries Smit.
X. NATUURKUNDE, Rutgers, Slagter, Steller, Swierstra.
XI. GETALLENLEER, Koksma, Popken.
XII. SCHEIKUNDE, Modderman, de Crauw.
XIII. BIOLOGIE, Van Calcar, L. K. Wolff.
XIV. MACHINES, Zernike.
XV. EXAMENS EN EXAMENOPGAVEN, Herbiet, Le Heux, Schamhardt, Schogt, Van de Vliet, Wijdenes.

KORRELS.

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - DR. E. W. BETH, AMERSFOORT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - DR. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
DR. J. HAANTJES, AMSTERDAM
DR. J. POPKEN, TER APEL - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSEN, HILVERSUM DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

20e JAARGANG 1943/44

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

BOEKBESPREKINGEN.

Verschenen:

Dr D. J. E. SCHREK
BEGINSELEN DER ANALYTISCHE MEETKUNDE
7e druk
met gratis antwoorden . . . . *f* 2,90*, geb. *f* 3,40*

F. HARKINK
INLEIDING TOT HET PRACTISCH REKENEN
f 3,60* . . . . geb. *f* 4,10*

P. WIJDENES en Dr H. J. E. BETH
NIEUWE SCHOOLALGEBRA I **14e druk** . . . . . *f* 2,25*
„ „ II **13e druk** . . . . . *f* 2,25*
„ „ (ter perse) III **9e druk** *f* 2,25*

P. WIJDENES
ALGEBRAISCHE VRAAGSTUKKEN II **9e druk** . . . *f* 1,70*
BEKNOPTE DRIEHOEKSMETING B **9e druk** . . . *f* 1,40*

WIJDENES en DE LANGE
LEERBOEK DER ALGEBRA II,
9e volledig omgewerkte druk,
vooral met het oog op de eisen van het Gymnasium en het Staatsexamen A.

VERKAART—HERREILERS
GIDS VOOR HET EXAMEN WISKUNDE L.O.
5e druk . . . . *f* 3,40*, gec. *f* 3,80*

Dr H. J. E. BETH
INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING
2e druk . . . . *f* 11,—*, geb. *f* 12,05*
Antwoorden . . . . *f* 1,05*

Uitgaven van P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA
Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

NIEUWE
SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES
AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH
DIRECTEUR VAN DE R.H.B.S. TE AMERSFOORT

I. Veertiende druk.	156 blz. 21 fig.	f 2,25*
II. Dertiende druk.	204 blz. 50 fig.	f 2,25*
III. Negende druk.	198 blz. 60 fig.	f 2,25*

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.
P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET
ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.
Vierde druk. 164 blz. 20 fig. f 2,00.

Voor Gymnasia en Lycea:
Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen
Vα en VIα Nieuwe Schoolalgebra IIIα
Vβ en VIβ Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:
Voor α de delen I, II, IIIα
Voor β de delen I, II, III.

Uitgave P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA
Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Voor leraren, die deze boeken gebruiken, antwoorden gratis en franco; de uitgewerkte log. vraagstukken in vier en vijf dec. gratis alleen bij P. Wijdenes, Amsterdam Z.; deze uitwerkingen zijn niet in de handel.

Verantwoordelijk voor de gehele inhoud:
P. Wijdenes te Amsterdam, Jacob Obrechtstraat 88.
Uitgever: P. Noordhoff N.V. te Groningen. Verantwoordelijk voor de advertentiën Drs F. C. Noordhoff.
Verschijnt ongeregeld. Abonnementsprijs f 6,30* per jaar.
Prijs per nummer f 1,55*.
Drukker: Drukkerij Gebroeders Hoitsema te Groningen. K 1219.

P 1073/4.